

DIE UNTERGRUPPENSTRUKTUR DER ENDLICHEN , EINFACHEN  
GRUPPE  $J_4$

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
'Doktor  
der Naturwissenschaften'

am Fachbereich Mathematik  
der Johannes Gutenberg-Universität  
in Mainz

Wolfgang Lempken  
geb. in Woldert

Mainz, 1985





Digitized by the Internet Archive  
in 2026





DIE UNTERGRUPPENSTRUKTUR DER ENDLICHEN , EINFACHEN

GRUPPE  $J_4$

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
'Doktor  
der Naturwissenschaften'

am Fachbereich Mathematik  
der Johannes Gutenberg-Universität  
in Mainz

Wolfgang Lempken  
geb. in Woldert

Mainz, 1985

1. Referent : Prof. Dr. D. Held
2. Referent : Prof. Dr. Z. Janko

## INHALTSVERZEICHNIS

|                                       | Seite |
|---------------------------------------|-------|
| Einleitung                            | 1     |
| Notation                              | 6     |
| §1 Bekannte Resultate                 | 8     |
| §2 Bekannte Eigenschaften von $J$     | 22    |
| §3 Lokale Untergruppen von $J$        | 29    |
| §4 Einfache Sektionen in $J$          | 100   |
| §5 Maximale 2-lokale Untergruppen     | 131   |
| §6 Einfache Untergruppen von $J$      | 182   |
| §7 Maximale Untergruppen von $J$      | 257   |
| §A Anhang (Tabellen, Charaktertafeln) | 273   |
| Literaturverzeichnis                  | 294   |
| Lebenslauf                            |       |

## EINLEITUNG

Mit der Entdeckung der sporadischen einfachen Gruppe  $J_1$  der Ordnung 175 560 durch Z. Janko im Jahre 1965 stieg das Interesse an der Theorie der endlichen, einfachen Gruppen sprunghaft. Waren bis zu diesem Zeitpunkt neben den zyklischen Gruppen von Primzahlordnung, den alternierenden Gruppen und denen vom Lie-Chevalley-Typ nur noch fünf weitere endliche, einfache Gruppen bekannt, nämlich jene um 1860 von E. Mathieu entdeckten Gruppen  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{22}$ ,  $M_{23}$  und  $M_{24}$ , so brach nach 1966 über dieses Gebiet gewissermaßen eine Flutwelle von bis dahin unbekannten sporadischen einfachen Gruppen herein, welche u.a. auch das sogenannte 'Monster' und 'Baby-Monster' an das Tageslicht spülte, und die erst im Jahre 1975 mit der inzwischen vierten von Z. Janko entdeckten einfachen Gruppe  $J_4$  zum Stillstand kam.

Bereits ein Jahr später, im Sommer 1976, gab es nach einer Konferenz in Duluth, Minnesota Grund genug zu der Annahme, daß eine Klassifikation der endlichen, einfachen Gruppen in absehbarer Zeit vollendet werden könne. Den Grundstein zu diesem ambitionierten Vorhaben legten schon W. Feit und J. Thompson im Jahre 1962 mit dem sogenannten Odd-Order-Theorem, welches besagt, daß endliche Gruppen ungerader Ordnung stets auflösbar sind. Einen weiteren Meilenstein setzte J. Thompson in den Jahren von 1968 bis 1974 mit seiner berühmten N-Gruppen Arbeit, in der u.a. alle minimalen einfachen Gruppen bestimmt werden;

es ist festzustellen, daß hier bereits Ideen und Methoden vorgestellt wurden, welche in späteren Phasen der Klassifikation eine wichtige Rolle spielten. Schon früh erkannte D. Gorenstein die fundamentale Bedeutung dieser Arbeiten; sie gaben ihm wohl einen entscheidenden Impuls, zum 'Vater der Klassifikation' zu avancieren. Es ist zum Teil auch Gorensteins großem Optimismus und beständiger Zuversicht zuzuschreiben, daß die Klassifikation der endlichen, einfachen Gruppen im Jahre 1981 zunächst einmal erfolgreich abgeschlossen werden konnte.

Es sollte an dieser Stelle erwähnt werden, daß die Fachwelt davon überzeugt ist, daß mögliche Fehler oder Lücken in der Klassifikation nicht prinzipieller sondern nur 'lokaler' Natur sind und daher mit bekannten Methoden behoben werden können. Unbefriedigend bleibt dennoch die Tatsache, daß der Beweis in seiner jetzigen Form wohl kaum von einem Mathematiker alleine kontrolliert werden kann.

Natürlich sind mit der Klassifikation nicht sämtliche Fragen aus dem Bereich der endlichen, einfachen Gruppen gelöst. So versteht man noch nicht so recht, welcher Zusammenhang zwischen den Lie-Chevalley-Gruppen und den 26 sporadischen einfachen Gruppen besteht. Bekanntlich haben die Gruppen vom Lie-Chevalley-Typ ein sogenanntes BN-Paar und sind somit als Automorphismengruppe eines geometrischen Objektes, nämlich eines Gebäudes, zu realisieren. Hier liegt auch der Ansatzpunkt für den Versuch, die sporadischen Gruppen als Automorphismengruppe eines geeigneten geometrischen Objektes zu beschreiben. In Frage kommen hier u.a. die



sogenannten Tits-Buekenhout-Geometrien. Diese Betrachtungsweise ist jedoch noch relativ neu und so gibt es noch viele ungelöste Probleme. Insbesondere ist noch nicht klar, wie man einer sporadischen Gruppe in kanonischer Weise eine Geometrie zuordnen soll. Da sich die einer Gruppe  $G$  zugeordnete Geometrie in jedem Falle in der Untergruppenstruktur von  $G$ , d.h. in dem Verhalten gewisser Untergruppen von  $G$  zueinander, widerspiegelt, liegt es nahe, zunächst einmal die interne Struktur von  $G$  unter diesem Aspekt zu untersuchen, um dann eventuell entscheiden zu können, welche der möglichen Geometrien als kanonisch zugeordnet anzusehen ist. Hat man diese Aufgabe erledigt, so sollte man im folgenden Schritt versuchen, die sporadischen Gruppen aus den Geometrien zurückzugewinnen, d.h. als deren Automorphismengruppen zu charakterisieren. Dieses Vorgehen birgt die Chance in sich, die Existenz von sporadischen Gruppen ohne die Hilfe eines Computers beweisen zu können. Beachtenswert ist in jedem Falle auch, daß die Automorphismengruppen von Tits-Buekenhout-Geometrien Eigenschaften haben, welche denen von Gruppen mit einem BN-Paar sehr ähnlich sind; so liegt hier vielleicht ein Schlüssel dazu, Licht in den Zusammenhang zwischen Lie-Chevalley- und sporadische Gruppen zu bringen und die letzteren in einem gewissen Sinne als Ausnahmefälle der ersten zu beschreiben.

In der vorliegenden Arbeit soll die interne Struktur der sporadischen einfachen Gruppe  $J_4$  untersucht werden, welche die Ordnung 86 775 571 046 077 562 880 hat und deren Existenz von S. Norton im Jahre 1980 nachgewiesen wurde.



Bezeichnen wir für eine nichtabelsche einfache Gruppe  $X$  mit  $X^*$  eine Gruppe derart, daß  $X \triangleleft X^* \leq \text{Aut}(X)$  ist, so können wir das Hauptergebnis wie folgt zusammenfassen.

THEOREM. Ist  $M$  eine maximale Untergruppe von  $J_4$ , dann liegt genau einer der folgenden Fälle vor:

(1)  $M$  ist eine 2-lokale Untergruppe von  $J_4$  und isomorph zu  $\text{Ex}(2^{13}) * \widehat{6}\text{Aut}(M_{22})$ ,  $\text{Spec}(2^{15}) \setminus [\text{Sym}_5 \times L_3(2)]$ ,  $E(2^{11}) \cdot M_{24}$  oder  $E(2^{10}) \cdot L_5(2)$ .

(2)  $M$  ist ein Sylow  $p$ -Normalisator von  $J_4$  mit einem  $p$  aus  $\{11, 29, 37, 43\}$ ; insbesondere ist  $M$  dann isomorph zu  $\text{Ex}(11^3) \cdot [\text{GL}_2(3) \times Z_5]$ ,  $Z_{29} \cdot Z_{28}$ ,  $Z_{37} \cdot Z_{12}$  oder  $Z_{43} \cdot Z_{14}$ .

(3)  $M$  ist isomorph zu  $\text{PGL}_2(23)$ ,  $\text{PFL}_2(32)$  oder  $\text{PEU}_3(11)$ .

(4)  $M$  ist isomorph zu einer der folgenden Gruppen:  
 (a)  $(\text{Alt}_5)^*$ ,  $(\text{Alt}_6)^*$ ,  $\text{Alt}_7$ ,  $\text{Alt}_8$ ,  $L_3(2)$ ,  $L_3(4)^*$ ;  
 (b)  $L_2(11)^*$ ,  $M_{11}$ ,  $L_2(23)$ ,  $(M_{22})^*$ ;  
 (c)  $U_3(3)$ .

Außerdem gibt es in den Fällen (1) - (3) jeweils genau eine Konjugiertenklasse von zu  $M$  isomorphen Untergruppen in  $J_4$ .

Es ist zu erwähnen, daß es zu jedem der im Theorem unter (4a) und (4b) aufgeführten Isomorphietypen in der Tat eine Untergruppe dieses Types in  $J_4$  gibt; diese ist aber nicht notwendigerweise maximal in  $J_4$ . Ferner ist noch

nicht geklärt, ob es zu  $U_3(3)$  isomorphe Untergruppen in  $J_4$  überhaupt gibt.

Die Schwierigkeiten in den den Fällen von (4) liegen in der Tatsache begründet, daß die zur Diskussion stehenden Gruppen im Verhältnis zu  $J_4$  sehr klein sind; insbesondere ist deren lokale Struktur auch relativ 'dünn', so daß die sogenannte Normalisatormethode nicht mit Erfolg anzuwenden ist. Bekanntlich hat  $J_4$  eine 112-dimensionale Darstellung über  $GF(2)$ ; man kennt ferner Elemente aus  $GL_{112}(2)$ , die eine zu  $J_4$  isomorphe Gruppe erzeugen. Diese Darstellung ist jedoch nicht so gut geartet, daß man Erzeuger für die unter (4) in Frage kommenden Untergruppen von  $J_4$  explizit angeben kann.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die Bestimmung der einfachen Untergruppen von  $J_4$  ohne die Benutzung der Klassifikation vorgenommen werden kann; dies wird in der vorliegenden Arbeit weitgehend vorgeführt.

### NOTATION

Die Bezeichnungsweise in der vorliegenden Arbeit ist Standard und in [24] sowie [35] zu finden. Um Mißverständnissen vorzubeugen, listen wir hier einige der verwendeten Bezeichnungen auf:

- $Z_n$  : zyklische Gruppe der Ordnung  $n$  ;  
 $F_n$  : Frobeniusgruppe der Ordnung  $n$  ;  
 $D_n$  : Diedergruppe der Ordnung  $n$  ;  
 $SD_n$  : Semidiedergruppe der Ordnung  $n$  ;  
 $Q_n$  : (verallg.) Quaternionengruppe der Ordnung  $n$  ;  
 $E(p^n)$  : elementar-abelsche Gruppe der Ordnung  $p^n$  ;  
 $Ex(p^n)$  : extraspezielle Gruppe der Ordnung  $p^n$  ;  
 $Spec(p^n)$  : spezielle Gruppe der Ordnung  $p^n$  ;  
 $Alt_n$  : alternierende Gruppe auf  $n$  Ziffern ;  
 $Sym_n$  : symmetrische Gruppe auf  $n$  Ziffern ;  
 $G^{(n)}$  : der  $n$ -te Term der Kommutatorreihe von  $G$  ;  
 $G^\infty$  : der letzte Term der Kommutatorreihe von  $G$  ;  
 $\Pi(G)$  : Menge der Primteiler von  $|G|$  ;  
 $Char(G)$  : Menge der irreduziblen komplexen Charaktere von  $G$  ;  
 $SM(G)$  : Schur-Multiplikator von  $G$  ;  
 $Aut_G(H)$  :  $N_G(H)/C_G(H)$  ;  
 $G \cong H$  :  $G$  ist isomorph zu einer Untergruppe von  $H$  ;  
 $\mathcal{K}$  : Menge der zur Zeit bekannten Isomorphietypen von endlichen einfachen Gruppen.

Wir sagen, daß  $G$  isomorph zu  $\hat{n}X$  ist, falls  $G'$  eine quasi-einfache Gruppe ist derart, daß  $|G : G'| \leq 2$ ,  $Z(G') \cong Z_n$  und  $G/Z(G') \cong X$  ist, wobei im Falle  $G \neq G'$  die Elemente aus  $G - G'$  invertierend auf  $Z(G')$  operieren.

Das semidirekte Produkt zweier Gruppen  $A$  und  $B$  bezeichnen wir mit  $A \cdot B$ , wobei  $A$  von  $B$  normalisiert wird;  $G \cong A \cdot B$  bedeutet, daß  $G$  einen Normalteiler  $N$  besitzt derart, daß  $N \cong A$  und  $G/N \cong B$  ist und  $G$  nicht über  $N$  zerfällt. Mit  $A * B$  bezeichnen wir ein Produkt von zwei Gruppen  $A$  und  $B$  derart, daß  $A$  von  $B$  normalisiert wird und  $\langle 1 \rangle \neq A \cap B = Z(A) \cap Z(B)$  gilt.

Es sei  $G$  eine Gruppe,  $H$  eine  $G$ -invariante Menge und  $g \in G$  sowie  $x, y \in H$ . Dann ist  $g : x \rightarrow y$  gleichbedeutend mit  $x^g = y$ ; ferner ist  $\text{ccl}_G(x)$  die Menge aller  $G$ -Konjugierten von  $x$ .

Ist  $H$  die disjunkte Vereinigung von  $\text{ccl}_G(h_i)$  mit  $|\text{ccl}_G(h_i)| = n_i$  und  $1 \leq i \leq r$ , so beschreiben wir dies mit  $(G \# H) = n_1 h_1 + n_2 h_2 + \dots + n_r h_r$ ; ist speziell  $H$  eine Gruppe, so schreiben wir an Stelle von  $(G \# H^\#)$  der Einfachheit halber auch  $(G \# H)$ , wobei  $H^\# = H - \{1\}$  ist.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß wir die Arbeiten [37] von Z. Janko und [38] von W. Lempken mit [J] und [L] zitieren werden. Der Einfachheit halber bezeichnen wir in der vorliegenden Arbeit die endliche, einfache Gruppe  $J_4$  mit  $J$ .

## §1 BEKANNTE RESULTATE

In diesem Paragraphen wollen wir einige bereits bekannte Resultate zusammenstellen, welche wir später oftmals benutzen werden.

(1.1) Lemma. Die Gruppe  $GL_5(2)$  hat genau fünf konjugierten Klassen von maximalen Untergruppen; sind  $X_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) Repräsentanten dieser Klassen, so ist o.B.d.A.  $X_1 \approx Z_{31} \cdot Z_5$ ,  $X_2 \approx X_3 \approx E(2^4) \cdot Alt_8$  und  $X_4 \approx X_5 \approx E(2^6) \cdot [Sym_3 \times L_3(2)]$ .

Beweis. Wir betrachten die Aktion von Untergruppen von  $GL_5(2)$  auf einem 5-dimensionalen Standardmodul von  $GL_5(2)$  über  $GF(2)$ ; damit erhalten wir schließlich die Existenz und Maximalität der Gruppen  $X_2, X_3, X_4$  und  $X_5$ . Da jede weitere maximale Untergruppe von  $GL_5(2)$  irreduzibel auf dem Standardmodul operieren muß, folgt die Behauptung nun mit einem Resultat von A. Wagner [79].

Q.E.D.

(1.2) Lemma. Es sei  $n \in \{5, 6, 7, 8\}$ ,  $G \approx Alt_n$  und  $V$  ein irreduzibler  $G$ -Modul der Dimension  $d$  über  $GF(2)$  mit  $d \neq 1$ . Dann gilt folgendes:

(a) Die möglichen Werte für  $d$  sind genau jene in der nachfolgenden Tabelle:

| n | d                       |
|---|-------------------------|
| 5 | 4, 4                    |
| 6 | 4, 4, 16                |
| 7 | 4, 4, 6, 14, 20         |
| 8 | 4, 4, 6, 14, 20, 20, 64 |



(b) Ist  $(n,d) \in \{(6,4), (8,6)\}$ , so ist  $H^1(G,V) \cong GF(2)$  ;  
für  $(n,d) \in \{(7,4), (8,4), (7,6)\}$  ist  $H^1(G,V) = 0$  .

Beweis. Die Dimension eines irreduziblen  $G$ -Moduls über einem Zerfällungskörper  $K$  der Charakteristik 2 ist wohl bekannt (siehe [78]); mit einem Resultat von Berman und Reiner [59] können wir nun leicht die Anzahl der irreduziblen  $G$ -Moduln über  $GF(2)$  bestimmen. Da nun einerseits  $GF(4)$  ein Zerfällungskörper von  $Alt_5$  und von  $Alt_6$  ist und andererseits  $GF(2)$  ein Zerfällungskörper von  $Alt_7$  und  $Alt_8$  ist, verifizieren wir nun leicht die Aussagen in Teil (a) .

Es sei daran erinnert, daß die Anzahl der Konjugiertenklassen von zu  $G$  isomorphen Komplementen in dem semidirekten Produkt  $V \rtimes G$  gleich  $|H^1(G,V)|$  ist. Im Falle von  $G \cong Alt_8$  finden wir die Behauptungen bei G. Bell [9]. Für  $(n,d) = (7,4)$  ergibt sich die Behauptung durch triviale Rechnung.

Wir betrachten nun den Fall  $(n,d) = (7,6)$  ; es sei nun ferner  $Alt_6 \cong U \trianglelefteq G$  . Dann ist  $V$  als  $U$ -Modul uniseriell vom Typ  $(1,4,1)$  ; nun berechnen wir leicht, daß  $H^1(U,V) = 0$  ist. Da  $|G : U| \equiv 1 \pmod{2}$  ist, folgt nun  $H^1(G,V) = 0$ . Bezeichnen wir in dieser Situation mit  $\bar{V}$  den irreduziblen  $U$ -Modul der Dimension 4 , welcher in  $V$  involviert ist, so berechnen wir ebenfalls ohne Schwierigkeiten, daß in diesem Falle  $H^1(U,\bar{V}) \cong GF(2)$  ist. Damit folgt schließlich die Behauptung in Teil (b) .

Q.E.D.

(1.3) Lemma. Es sei  $q \in \{2, 4\}$  und  $G = L_3(q)$  sowie  $V$  ein nichttrivialer irreduzibler  $G$ -Modul der Dimension  $d$  über  $GF(2)$ . Dann liegt genau ein Fall aus der folgenden Tabelle vor:

| q | d            |
|---|--------------|
| 2 | 3, 3, 8      |
| 4 | 9, 9, 16, 64 |

Ist  $(q, d) = (2, 3)$ , so ist  $H^1(G, V) \cong GF(2)$ .

Beweis. Die Aussagen sind im Falle  $G = L_3(2)$  alle wohl bekannt. Die Dimensionen der irreduziblen  $L_3(4)$ -Moduln über einem endlichen Zerfällungskörper  $K$  der Charakteristik 2 finden wir bei G. James [36]; nun können wir mit den im Beweis von (1.2) erwähnten Methoden auch in diesem Falle die möglichen Werte von  $d$  bestimmen.

Q.E.D.

(1.4) Lemma. Es sei  $G = L_3(4)$  und  $V \cong E(2^3)$  ein irreduzibler  $G$ -Modul. Dann operiert  $G$  auf  $V$  wie folgt:  
 $(G \# V) = 21 v_1 + 210 v_2 + 280 v_3$ .

Bezeichnen wir mit  $G_i$  die Gruppe  $C_G(v_i)$ , so gilt  $G_1 \cong E(2^4) \cdot \text{Alt}_5$ ,  $G_2 \cong E(2^4) \cdot \text{Sym}_3$  und  $G_3 \cong E(3^2) \cdot Q_8$ . Ferner können wir  $v_1$  und  $v_2$  so wählen, daß die Gruppe  $\langle O_2(G_1), O_2(G_2) \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $G$  ist.

Beweis. Die Behauptung des Lemmas verifiziert man durch einfache Rechnungen unter Berücksichtigung der Untergruppenstruktur von  $L_3(4)$ .

Q.E.D.

(1.5) Lemma. Die Gruppe  $G = U_3(3)$  hat genau fünf irreduzible  $GF(2)$ -Moduln; deren Dimensionen sind 1, 6, 14 sowie 32 und 32. Ist  $V \approx E(2^6)$  ein irreduzibler Modul für  $G$ , so gilt  $H^1(G, V) \approx GF(2)$ .

Beweis. Wir beachten zunächst, daß  $|G| = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$  und ferner  $G \approx G_2(2)'$  ist. Einer Arbeit von J. McKay [40] entnehmen wir die Charaktertafel von  $G$ ; insbesondere sehen wir, daß  $G$  genau fünf Klassen von  $2'$ -Elementen hat. Da  $K = GF(2)$  ein Zerfällungskörper für  $G$  ist, gibt es somit genau fünf irreduzible  $G$ -Moduln über  $K$ . Offensichtlich zerfällt der Steinbergmodul von  $G_2(2)$  in zwei irreduzible  $G$ -Moduln der Dimension 32. Einer Arbeit von M. O'Nan [52] entnehmen wir die Existenz eines irreduziblen  $G$ -Moduls  $V$  der Dimension 6 über  $K$  sowie die Tatsache, daß  $H^1(G, V) \approx K$  ist. Aus [52] können wir ferner für erzeugende Elemente von  $G$  die  $6 \times 6$ -Darstellungsmatrizen auf  $V$  entnehmen. Mit  $W$  bezeichnen wir nun die zweite Komponente der äußeren Algebra über  $V$ ; dann ist  $W$  ein  $G$ -Modul der Dimension  $\binom{6}{2} = 15$  über  $K$ . Wir sind nun in der Lage, mit einfachen Rechnungen die Darstellungsmatrizen von Elementen aus  $G$  auf  $W$  zu bestimmen und damit schließlich nachzuweisen, daß  $C_W(G) \approx Z_2$  ist. Durch Betrachtung der zugehörigen Zerlegungsmatrix von  $G$  sehen wir nun leicht, daß der noch fehlende fünfte irreduzible  $G$ -Modul in  $W$  involviert ist. Nun verifiziert man leicht, daß  $W/C_W(G)$  genau dieser irreduzible  $G$ -Modul ist.

Q.E.D.

(1.6) Theorem. Es sei  $G$  eine endliche Gruppe derart, daß  $Q = O_2(G) \neq \langle 1 \rangle$  und  $G/Q \cong \text{Alt}_n$  mit  $n \in \{5, 6\}$  ist. Dann gilt folgendes:

(a) Ist  $n = 5$  und operiert ein Element der Ordnung 3 fixpunktfrei auf  $Q$ , so ist  $Q$  elementar-abelsch und ein direktes Produkt von minimalen Normalteilern der Ordnung 16 von  $G$ ; ferner zerfällt  $G$  über  $Q$  und die Sylow 2-Untergruppen von  $G$  haben die Klasse 2. Ist außerdem  $|Q| > 16$ , so ist  $Q$  die einzige abelsche Untergruppe von der Ordnung  $|Q|$  in  $G$ .

(b) Ist  $n = 5$  und operiert ein Element der Ordnung 5 fixpunktfrei auf  $Q$ , so zerfällt  $G$  über  $Q$ .

(c) Ist  $n = 6$  und operiert ein Element der Ordnung 5 aus  $G$  fixpunktfrei auf  $Q$ , so ist  $Q$  elementar-abelsch und  $G$  zerfällt über  $Q$ ; ferner ist  $Q$  ein direktes Produkt von minimalen Normalteilern der Ordnung 16 von  $G$ .

Beweis. Die Resultate finden wir in Arbeiten von G. Higman [34] und A.R. Prince [54], [55].

Q.E.D.

(1.7) Theorem (E. Bombieri [13]). Ist  $G$  eine endliche Gruppe vom Ree-Typ, so ist  $G$  isomorph zu  ${}^2G_2(q)$ , wobei  $q$  eine ungerade 3-Potenz ist.

(1.8) Theorem. Ist  $G$  eine endliche, einfache Gruppe, deren Sylow 2-Untergruppen abelsch sind, so ist  $G$  ein Element von  $\mathcal{K}$ .

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus einem Theorem von J.H. Walter [81] und dem Theorem (1.7).

Q.E.D.

(1.9) Theorem. Es sei  $G$  eine endliche, einfache Gruppe mit einer Sylow 2-Untergruppe der Ordnung höchstens  $2^{10}$ ; dann gilt eine der folgenden Aussagen:

(a) Die Gruppe  $G$  ist in  $\mathcal{K}$  enthalten.

(b)  $G$  enthält eine Involution  $t$  derart, daß  $C_G(t)/O(C_G(t))$  isomorph ist zu einem Element aus der Menge  $\{ \hat{4M}_{22}, Z_2 \times (\hat{4M}_{22}), Z_8 * \hat{4M}_{22}, (\hat{4M}_{22}) Z_2 \}$ .

Beweis. Den Beweis dieses Theorems finden wir im wesentlichen bei B. Beisiegel [8] und V. Stingl [69]. Dabei sei erwähnt, daß der Fall (b) aus der Tatsache resultiert, daß man seinerzeit den Schur-Multiplikator von  $M_{22}$  irrtümlicherweise isomorph zu  $Z_6$  wähnte.

Q.E.D.

(1.10) Theorem (D.Gorenstein, K.Harada [26]).

Ist  $G$  eine endliche, einfache Gruppe von sektionalem 2-Rang höchstens vier, so ist  $G$  in  $\mathcal{K}$  enthalten.

(1.11) Theorem (McLaughlin [41]). Es sei  $V$  ein Vektorraum der Dimension  $n \geq 2$  über  $GF(2)$  und  $G$  eine Untergruppe von  $SL(V)$ , welche irreduzibel auf  $V$  operiert und außerdem von Transvektionen erzeugt wird. Falls  $G \neq SL(V)$  ist, gilt  $n \geq 4$  und  $G$  ist eine der folgenden Untergruppen von  $Sp(V)$ :  $Sp(V)$ ,  $O^-(V)$ ,  $O^+(V)$  für  $n \neq 4$ ,  $Sym_{n+1}$  oder  $Sym_{n+2}$ .

(1.12) Theorem (Aschbacher [6]). Ist  $G$  eine endliche, einfache Gruppe, in der jede 2-lokale Untergruppe zyklische Sylow  $p$ -Untergruppen hat für ungerade Primzahlen  $p$ , so ist  $G$  in  $\mathcal{K}$  enthalten.

(1.13) Theorem. Es sei  $G$  eine endliche, einfache Gruppe, welche eine Involution  $z$  enthält derart, daß  $F^*(C_G(z))$  eine 2-Gruppe von symplektischem Typ ist; dann ist  $G \in \mathcal{K}$ .

Beweis. Nach Aschbacher [3, Thm. 1] gilt die Behauptung oder aber  $F^*(C_G(z))$  ist eine extraspezielle 2-Gruppe von der Weite  $m \geq 2$ .

Der Fall  $m = 2$  wird von Aschbacher in [4; Lemma 4.6] abgehandelt. Es sei also nun o.B.d.A.  $F^*(C_G(z)) \cong Ex(2^{2m+1})$  mit  $m \geq 3$ . Wir können nun ein bekanntes Theorem von F. Timmesfeld [75] anwenden und dann o.B.d.A. annehmen, daß nur noch einige Spezialfälle vorliegen, welche Timmesfeld genau beschreibt, jedoch nicht weiter untersucht. Diese Fälle werden aber abgehandelt von S. Smith [61],[62],[63] sowie A. Reifart [58],[58a] und J. Bierbrauer [11].

Q.E.D.



(1.14) Theorem. Es sei  $G$  eine endliche, einfache Gruppe, welche eine Standarduntergruppe  $A$  enthält; dann gelten die folgenden Aussagen:

- (1)  $A$  ist nicht isomorph zu  $M_{22}$  oder  $\hat{3}M_{22}$ .
- (2) Ist  $A/Z(A)$  isomorph zu  $L_3(4)$ , dann ist  $G$  isomorph zu  $Sz$ ,  $He$  oder  $O'N$ .
- (3) Ist  $A/Z(A)$  isomorph zu  $Alt_5$ , so ist  $G \in \mathcal{K}$ .
- (4) Ist  $A/Z(A)$  isomorph zu  $Alt_6$ ,  $Alt_7$ ,  $L_2(7)$  oder  $L_2(11)$ , so ist  $G$  in  $\mathcal{K}$  enthalten.

Beweis. Mit den Resultaten von Finkelstein [20] und Cheng, Held [15] sowie Griess, Mason, Seitz [28] folgen die Aussagen unter (1) - (3).

Im Falle (4) nehmen wir an, daß  $G$  nicht in  $\mathcal{K}$  enthalten ist; ferner sei  $K = C_G(A)$  und  $R$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $K$ . Ist  $|Z(A)|$  gerade, so sind die Sylow 2-Untergruppen von  $A$  Quaternionengruppen und  $A$  ist dann fest eingebettet in  $G$ . Nach Resultaten von Aschbacher, Seitz [5], [7] und Harris [33; Korollar] folgt nun, daß  $R$  zyklisch ist und daß  $A \cong L_2(11)$  ist. Nun ist aber  $A$  eine 2-Komponente von  $H = C_G(t)$  für  $\langle t \rangle \cong \Omega_1(R)$ . Außerdem erhalten wir, daß  $N_H(A)/(A \cap C_H(A))$  isomorph ist zu einer Untergruppe der äußeren Automorphismengruppe  $\text{Out}(A) \cong Z_2$ . Mit einem Resultat von Harris, Solomon [33a; Propos. 3.2] erhalten wir nun aber doch den Widerspruch  $G \in \mathcal{K}$ .

Q.E.D.

(1.15) Theorem. Es sei  $G$  eine endliche, einfache Gruppe mit einer 2-Untergruppe  $E$  derart, daß  $|E| \leq 16$  und  $E$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $F := E C_G(E)$  ist; ferner gelte eine der folgenden Bedingungen:

(a)  $O_2(N_G(E)/F) = \langle 1 \rangle$ .

(b)  $N_G(E)/F$  ist nicht auflösbar.

Dann ist der sektionale 2-Rang von  $G$  höchstens vier oder  $G$  ist isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

$HiS$ ,  $Co_3$ ,  $He$ ,  $M_{24}$ ,  $L_5(2)$ ,  $Alt_{16}$ ,  $Alt_{17}$ ,  $Alt_{18}$ ,  $Alt_{19}$ ,  
 $L_4(q)$  mit  $q \equiv 1 \pmod{8}$ ,  $U_4(q)$  mit  $q \equiv -1 \pmod{8}$ ,  
 $L_6(q)$  mit  $q \equiv -1 \pmod{4}$ ,  $U_6(q)$  mit  $q \equiv 1 \pmod{4}$ .

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Arbeiten von Stroth [70], [71], Foote [22], Harada [31] sowie O'Nan, Solomon [53].

Q.E.D.

(1.16) Theorem (Goldschmidt [23]). Es sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $T \in Syl_2(G)$  und  $A$  eine abelsche Untergruppe von  $T$ ; ferner sei  $K := \langle A^g \mid g \in G \rangle$  und  $\bar{K} := K/O(K)$ .

Genau dann ist  $A$  stark abgeschlossen in  $T$  bzgl.  $G$ , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1)  $\bar{A} = O_2(\bar{K}) \Omega_1(\bar{S})$  für ein  $S \in Syl_2(K)$  mit  $A \leq S$ .

(2)  $\bar{K}$  ist das zentrale Produkt einer abelschen 2-Gruppe und quasi-einfachen Gruppen  $L$  derart, daß  $L/Z(L)$  isomorph ist zu  $L_2(2^{2+n})$ ,  $Sz(2^{2n+1})$ ,  $U_3(2^{1+n})$ ,  ${}^2G_2(3^{2n+1})$ ,  $L_2(q)$  oder  $J_1$ ; dabei ist  $n \geq 1$ ,  $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$  und in den letzten drei Fällen  $|Z(L)|$  ungerade.

(1.17) Lemma. Es sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $T$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $G$  und  $A$  eine elementar-abelsche Untergruppe von  $T$ , welche schwach abgeschlossen ist in  $T$  bzgl.  $G$ ; ferner sei  $\Pi := \{ B \leq T \mid B \not\leq A, \exists g \in G: B^g \leq A \}$  und  $r := \text{Max} \{ m(B/C_B(A)) \mid B \in \Pi \}$ .

Falls  $A$  nicht stark abgeschlossen ist in  $T$  bzgl.  $G$ , so gelten die folgenden Aussagen:

- (1)  $\Pi \neq \emptyset$  und es existiert ein  $B \in \Pi$  mit  $m(B) + r \geq m(A)$ .
- (2) Ist  $B \in \Pi$ , so gilt  $C_B(A) = B \cap A$  und es existiert ein  $g \in G$  mit  $B^g \leq A$  und  $(N_T(B))^g \leq T$ .
- (3) Ist  $t$  eine Involution aus  $T$  mit  $\text{ccl}_G(t) \cap A \neq \emptyset$ , so gilt  $m([A, t]) \leq r$ .
- (4) Ist  $B \in \Pi$  von maximaler Ordnung und  $t \in B - A$ , dann gilt  $|B| \geq |C_A(t)| \cdot |[A, t] \cap (B \cap A)| \geq |[A, t]| \cdot |B \cap A|$ .

Beweis. Die Aussagen in (1), (2) und (3) werden von Goldschmidt in [23; (9.3), Korollar 4] bewiesen.

Es sei nun  $B \in \Pi$  von maximaler Ordnung und  $t \in B - A$ . Wir setzen  $B_1 = (B \cap A)\langle t \rangle$  und  $B_2 = N_A(B_1)$ .

Wir nehmen zunächst an, daß  $|B| < |B_2|$  ist. Dann ist  $B_2 \notin \Pi$ . Da  $B_1 \leq B$  ist, folgt  $B_1 \in \Pi$ . Somit existiert ein  $g \in G$  mit  $(B_1)^g \leq A$  und  $(B_2)^g \leq (N_T(B_1))^g \leq T$ . Da  $B_2 \notin \Pi$ , folgt  $(B_2)^g \leq A$  und somit  $(B_1 B_2)^g \leq A$ . Also ist  $B_1 B_2 \in \Pi$ . Dies widerspricht der Wahl von  $B$ . Wir haben gezeigt, daß  $|B| \geq |B_2|$  ist.

Da nun einerseits  $|B_2| = |C_A(t)| \cdot |[A, t] \cap (B \cap A)|$  ist und andererseits sowohl  $[A, t]$  als auch  $B \cap A$  in  $C_A(t)$  enthalten sind, folgt die Aussage in (4).

Q.E.D.

(1.18) Lemma. Es sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $T$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $G$  und  $A$  ein abelscher Normalteiler von  $T$  mit  $\text{Exp}(A) \leq 4$  und  $|A^g \cap N_G(A)| \leq |A|/4$  für alle  $g$  aus  $G - N_G(A)$ ; dann ist  $T \cap G' = T \cap N_G(A)'$ .

Beweis. Die Behauptung folgt aus Korollar (3.10.1) und Lemma (4.1) in der Arbeit von Yoshida [82].

(1.19) Theorem (G. Higman [34; Thm. 5.1]). Es sei  $G$  eine endliche, einfache Gruppe und  $A$  eine abelsche Untergruppe von  $G$  mit  $C_G(a) \leq A$  für  $1 \neq a \in A$ ; ist ferner  $N_G(A)/A = Z_2$ , so sind alle Involutionen in  $G$  konjugiert.

(1.20) Theorem. Es sei  $G$  eine endliche, einfache Gruppe, welche 2-fach transitiv auf der Menge  $\Omega$  operiert; ferner sei  $\alpha \in \Omega$  und  $H = \text{Stab}_G(\alpha)$ . Dann gilt folgendes:

(a) Entweder ist  $H$  eine lokale Untergruppe von  $G$  oder es gibt eine einfache Gruppe  $X$  mit  $X \leq H \leq \text{Aut}(X)$ .

(b) Ist  $H$  eine lokale Untergruppe von  $G$ , so liegt  $G$  in  $\mathcal{K}$ , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: (1)  $|\Omega| = |G : H|$  ist ungerade;

(2)  $H$  ist auflösbar;

(3)  $H$  besitzt einen abelschen Normalteiler, welcher nicht semiregulär auf  $\Omega - \{\alpha\}$  operiert.

Beweis. Die Behauptungen folgen unmittelbar aus Arbeiten von M. O'Nan [47],[48],[49] und M. Aschbacher [2].

(1.21) Theorem. Es sei  $G$  eine endliche, einfache Gruppe, welche primitiv auf der Menge  $\Omega$  operiert; ferner sei  $|\Omega| = n$ . Dann operiert  $G$  2-fach transitiv auf  $\Omega$ , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (1)  $n$  ist eine Primzahl;
- (2) Es gilt  $n = 2 \cdot p$  mit einer Primzahl  $p$  derart, daß  $n - 1$  keine Quadratzahl ist;
- (3) Es gilt  $n = 3 \cdot p$  mit einer Primzahl  $p$ , welche nicht von der Form  $p = 196 \cdot z^2 + 60 \cdot z + 5$  oder  $p = 3 \cdot z^2 + 3 \cdot z + 1$  ist mit einer ganzen Zahl  $z$ .

Beweis. Man konsultiere die Sätze (3.1), (14.1) und (14.6) in der Arbeit von P.M. Neumann [45].

(1.22) Theorem. Es sei  $G$  eine endliche, einfache Gruppe vom Charakteristik 2-Typ und  $M$  eine maximale 2-lokale Untergruppe von  $G$ ;  $M$  enthalte einen Normalteiler  $X$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (1)  $M$  ist die einzige maximale 2-lokale Untergruppe von  $G$ , welche  $X$  enthält.
- (2) Es ist  $X = O^2(X)$  und  $\bar{X} := X/O_2(X) \cong \text{Alt}_n$  mit  $n \geq 3$ .
- (3)  $X$  hat genau einen nichtzentralen 2-Hauptfaktor und es ist  $W := [O_2(X), X] \leq \Omega_1(Z(O_2(X)))$ ; ferner ist  $W/C_W(X)$  als  $\text{GF}(2)$ - $\bar{X}$ -Modul isomorph zu dem nichttrivialen irreduziblen Kompositionsfaktor des  $n$ -dimensionalen Standardpermutationsmoduls oder es ist  $n = 7$  und  $W/C_W(X) \cong E(2^4)$ .

Dann ist  $G$  in  $\mathcal{K}$  enthalten.

Beweis. Man konsultiere die Arbeiten von R. Solomon [65], J.I. Hall [29] und die Resultate aus (1.13) und (1.15).

(1.23) Theorem (R. Solomon, S.K. Wong [66; Thm. 1.9] ).

Es sei  $G$  eine endliche, einfache Gruppe vom Charakteristik 2-Typ und  $M$  eine maximale 2-lokale Untergruppe von  $G$ , welche einen Subnormalteiler  $X$  enthält derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind :

- (1)  $M$  ist die einzige maximale 2-lokale Untergruppe von  $G$ , welche  $X$  enthält.
- (2) Es ist  $X = O^2(X)$  und  $\bar{X} := X/O_2(X) \cong L_2(2^n)$  mit  $n \geq 1$ .
- (3)  $X$  hat genau einen nichtzentralen 2-Hauptfaktor und es ist  $W := [O_2(X), X] \leq \Omega_1(Z(O_2(X)))$ ; ferner ist  $W/C_W(X)$  isomorph zu dem irreduziblen  $\bar{X}$ -Standardmodul der Dimension  $2n$  über  $GF(2)$ .

Dann ist  $G$  in  $\mathcal{K}$  enthalten.

(1.24) Lemma. Es sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $a, b$  und  $c$  seien Elemente aus  $\tilde{G}$ ; mit  $\sigma_G(a, b; c)$  bezeichnen wir die Anzahl der möglichen Darstellungen  $c = \bar{a} \cdot \bar{b}$ , wobei  $\bar{a} \in \text{ccl}_G(a)$  und  $\bar{b} \in \text{ccl}_G(b)$  ist. Bekanntlich gilt dann

$$(1) \quad \sigma_G(a, b; c) = \frac{|G|}{|C_G(a)| \cdot |C_G(b)|} \cdot \sum \frac{\chi(a) \chi(b) \chi(c^{-1})}{\chi(1)},$$

wobei über alle irreduziblen komplexen Charaktere  $\chi$  von  $G$  summiert wird.

Wir setzen nun  $\tau_G(a, b; c) := \sigma_G(a, b; c^{-1})$  und außerdem  $\zeta_G(a, b, c) = \tau_G(a, b; c)/|C_G(c)|$ . Dann gilt

$$(2) \quad \zeta_G(a, b, c) = \sum 1/|C_G(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle)|;$$

dabei wird über ein Repräsentantensystem der  $G$ -Konjugiertenklassen von Tripeln  $(\bar{a}, \bar{b}, c)$  summiert derart, daß  $\bar{a} \in \text{ccl}_G(a)$

und  $\bar{b} \in \text{ccl}_G(b)$  ist sowie  $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c = 1$ . Eine Summation über die leere Menge in (2) liefert wie gewöhnlich den Wert 0.

Es ist üblich, die Größen  $\sigma_G(a,b;c)$  als Strukturkonstanten von  $G$  zu bezeichnen; wir wollen daher die Größen  $\zeta_G(a,b,c)$  auch symmetrisierte oder verallgemeinerte Strukturkonstanten von  $G$  nennen.

Beweis. Ein Beweis von (1) findet sich bei G. Higman [34]; daraus folgt mit einfachen Rechnungen dann auch die Behauptung in (2).

Q.E.D.



## §2 BEKANNTE EIGENSCHAFTEN VON J

In diesem Paragraphen werden wir einige bekannte Eigenschaften der einfachen Gruppe  $J$  zusammenstellen.

(2.1) Theorem (Janko [37], Norton [46]). Die Gruppe  $J$  ist bis auf Isomorphie die einzige endliche, einfache Gruppe  $G$ , welche eine Involution  $z$  enthält derart, daß  $H = C_G(z)$  den folgenden Bedingungen genügt:

- (1)  $E := O_2(H) \cong \text{Ex}(2^{13})$  und  $C_H(E) \leq E$ ;
- (2) Eine Sylow 3-Untergruppe  $P$  von  $O_{2,3}(H)$  hat die Ordnung 3 und es gilt  $C_E(P) = Z(E) = \langle z \rangle$ ;
- (3) Es ist  $H/O_{2,3}(H) \cong \text{Aut}(M_{22})$ ,  $N_H(P) \not\leq C_H(P)$  und  $P \leq (C_H(P))'$ .

Außerdem ist  $|J| = 2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$ .

(2.2) Theorem (Reifart [57]). Es sei  $G$  eine endliche Gruppe, welche eine elementar-abelsche Untergruppe  $V$  der Ordnung  $2^{11}$  enthält derart, daß  $C_G(V) = V$ ,  $N_G(V)/V \cong M_{24}$  und  $O(C_G(z)) = \langle 1 \rangle$  ist für 2-zentrale Involutionen  $z$  aus  $N_G(V)$ . Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

- (1)  $V$  ist ein Normalteiler von  $G$ .
- (2)  $G$  ist isomorph zu  $J$  oder  $\text{Col}$ .
- (3)  $G$  ist einfach,  $|G| = |M(24)'|$  und der Zentralisator einer 2-zentralen Involution von  $G$  ist isomorph zum Zentralisator einer 2-zentralen Involution von  $M(24)'$ .

(2.3) Theorem (Reifart [56]). Es sei  $G$  eine endliche Gruppe, welche eine Involution  $t$  enthält derart, daß  $V := O_2(C_G(t))$  eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung  $2^{11}$  ist und daß  $C_G(V) = V$  sowie  $C_G(t)/V \cong \text{Aut}(M_{22})$  ist. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

- (1)  $G = O(G) \cdot C_G(t)$  .
- (2)  $V$  ist ein Normalteiler von  $G$  mit  $G/V \cong M_{24}$  .
- (3)  $G$  ist isomorph zu  $J$  .

(2.4) Theorem (Van Trung [77]). Es sei  $G$  eine endliche, einfache Gruppe vom Charakteristik 2-Typ und  $M$  sei eine 2-lokale Untergruppe von  $G$  derart, daß folgendes gilt:

- (1)  $Q := O_2(M) \cong \text{Spec}(2^{15})$  ,  $Z := Z(Q) \cong E(2^3)$  ,  
 $M = N_G(Z)$  und  $M/Q \cong \text{Sym}_5 \times L_3(2)$  ;
- (2) Sind  $x$  und  $y$  Elemente aus  $M$  mit  $o(x) = 7$  ,  
 $o(y) = 3$  und  $[x, y] = 1$  , so gelte  $C_Q(x) = \langle 1 \rangle$   
und  $C_Q(y) = Z$  .

Dann ist  $G$  isomorph zu  $J$  .

(2.5) Theorem (Siegeris [60]). Es sei  $G$  eine endliche, fusionseinfache Gruppe und  $S$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $G$  derart, daß  $S$  vom Typ  $J$  ist. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

- (1)  $G$  ist isomorph zu  $J$  .
- (2)  $G$  enthält einen elementar-abelschen Normalteiler  $V$  der Ordnung  $2^{11}$  derart, daß  $G/V$  isomorph ist zur Mathieu-Gruppe  $M_{24}$  .

(2.6) Theorem (Dexheimer [19], Lempken [38]).

Es sei  $G$  eine endliche Gruppe mit einer elementar-abelschen Untergruppe  $V$  der Ordnung  $2^{10}$  derart, daß  $N_G(V)/V$  isomorph zu  $GL_5(2)$  ist und irreduzibel auf  $V$  operiert. Ferner sei  $C_G(z) = \langle 1 \rangle$  für 2-zentrale Involutionen  $z$  aus  $N_G(V)$ . Dann gilt eine der folgenden Behauptungen:

- (1)  $V$  ist ein Normalteiler von  $G$  und  $G$  zerfällt über  $V$ .
- (2)  $G$  ist isomorph zu  $D_5(2)$ ,  $\text{Aut}(D_5(2)) \approx D_5(2) \cdot Z_2$  oder zu  $J$ .

(2.7) Theorem (Stafford [67], Stroth [72]).

Es sei  $G$  eine endliche Gruppe, welche nicht 3-normal ist. Ferner sei  $x$  ein Element der Ordnung drei aus  $G$  und  $H := C_G(x)$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Ist  $G$  einfach und  $H$  isomorph zu  $\hat{3}M_{22}$  oder  $\hat{6}M_{22}$ , so ist  $G$  isomorph zu  $J$ .
- (2) Ist  $G$  vom Charakteristik 2-Typ und  $H$  isomorph zu  $\hat{6}M_{22}$ , dann ist  $G$  isomorph zu  $J$ .

(2.8) Lemma (Janko [37]). Ist  $G$  eine Gruppe isomorph zu  $J_4$ , so hat  $G$  genau 62 Konjugiertenklassen von Elementen.

In der folgenden Tabelle sind weitere Informationen über Repräsentanten dieser Klassen aufgelistet; dabei treten die Repräsentanten  $x_i$  und  $x_j$  zweier verschiedener  $G$ -Klassen in einer Zeile auf, falls  $\langle x_i \rangle = \langle x_j \rangle$  ist.

| Repräsentant<br>$x$ | $o(x)$ | $ C_G(x) $                                  | Struktur von $C_G(x)$                                      | Fusion der<br>Potenzen        |
|---------------------|--------|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $x_1$               | 1      | $ J_4 $                                     | .                                                          |                               |
| $x_2$               | 2      | $2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ | $Ex(2^{13}) \rtimes \widehat{6}Aut(M_{22})$                |                               |
| $x_3$               | 2      | $2^{19} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ | $E(2^{11}) \cdot Aut(M_{22})$                              |                               |
| $x_4$               | 3      | $2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$    | $\widehat{6}M_{22}$                                        |                               |
| $x_5$               | 4      | $2^{15} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$           | $\{[Z_4 \rtimes Ex(2^{11})] \cdot L_2(11)\} \setminus Z_2$ | $()^2 \sim x_2$               |
| $x_6$               | 4      | $2^{15} \cdot 3$                            |                                                            | $()^2 \sim x_2$               |
| $x_7$               | 4      | $2^{11} \cdot 3 \cdot 7$                    | $Z_4 \times [E(2^6) \cdot L_3(2)]$                         | $()^2 \sim x_3$               |
| $x_8$               | 5      | $2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$               | $Z_5 \times [E(2^3) \setminus L_3(2)]$                     |                               |
| $x_9$               | 6      | $2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$    | $\widehat{6}M_{22}$                                        | $()^3 \sim x_2$               |
| $x_{10}$            | 6      | $2^8 \cdot 3^2$                             | $Z_3 \times (Z_2 \setminus [E(2^4) \cdot Sym_4])$          | $()^3 \sim x_2$               |
| $x_{11}$            | 6      | $2^8 \cdot 3^2$                             | $Z_3 \times (Z_2 \setminus [E(2^4) \cdot Sym_4])$          | $()^3 \sim x_3$               |
| $x_{12}, x_{13}$    | 7      | $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$               | $Z_7 \times Sym_5$                                         |                               |
| $x_{14}$            | 8      | $2^8 \cdot 3$                               |                                                            | $()^2 \sim x_6$               |
| $x_{15}$            | 8      | $2^8 \cdot 5$                               |                                                            | $()^2 \sim x_5$               |
| $x_{16}$            | 8      | $2^9$                                       |                                                            | $()^2 \sim x_6$               |
| $x_{17}$            | 10     | $2^6 \cdot 3 \cdot 5$                       | $Z_5 \times [E(2^3) \setminus Sym_4]$                      | $()^5 \sim x_2$               |
| $x_{18}$            | 10     | $2^4 \cdot 5$                               |                                                            | $()^5 \sim x_3$               |
| $x_{19}$            | 11     | $2^3 \cdot 3 \cdot 11^3$                    | $Ex(11^3) \cdot Q_8 \cdot Z_3$                             |                               |
| $x_{20}$            | 11     | $2 \cdot 11^2$                              | $Z_{11} \times [Z_{11} \cdot Z_2]$                         |                               |
| $x_{21}$            | 12     | $2^6 \cdot 3$                               |                                                            | $()^2 \sim x_{10}, ()^3 \sim$ |
| $x_{22}$            | 12     | $2^6 \cdot 3$                               |                                                            | $()^2 \sim x_{10}, ()^3 \sim$ |
| $x_{23}$            | 12     | $2^4 \cdot 3$                               |                                                            | $()^2 \sim x_{11}, ()^3 \sim$ |

| Repräsentant<br>x        | $o(x)$ | $ C_G(x) $             | Struktur von $C_G(x)$                | Fusion der<br>Potenzen               |
|--------------------------|--------|------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $x_{24}, x_{25}$         | 14     | $2^2 \cdot 3 \cdot 7$  | $Z_7 \times Z_2 \times \text{Sym}_3$ | $()^7 \sim x_2$                      |
| $x_{26}, x_{27}$         | 14     | $2^3 \cdot 7$          | $Z_7 \times D_8$                     | $()^7 \sim x_3$                      |
| $x_{28}$                 | 15     | $2 \cdot 3 \cdot 5$    | $Z_{30}$                             |                                      |
| $x_{29}$                 | 16     | $2^5$                  |                                      | $()^2 \sim x_{16}$                   |
| $x_{30}, x_{31}$         | 20     | $2^5 \cdot 5$          |                                      | $()^2 \sim x_{17}, ()^5 \sim x_5$    |
| $x_{32}, x_{33}$         | 21     | $2 \cdot 3 \cdot 7$    | $Z_{42}$                             |                                      |
| $x_{34}$                 | 22     | $2^3 \cdot 3 \cdot 11$ | $Z_{11} \times [Q_8 \cdot Z_3]$      | $()^2 \sim x_{19}, ()^{11} \sim x_2$ |
| $x_{35}$                 | 22     | $2 \cdot 11$           | $Z_{22}$                             | $()^2 \sim x_{20}, ()^{11} \sim x_3$ |
| $x_{36}$                 | 23     | 23                     | $Z_{23}$                             |                                      |
| $x_{37}, x_{38}$         | 24     | $2^4 \cdot 3$          |                                      | $()^2 \sim x_{21}, ()^3 \sim x_{14}$ |
| $x_{39}, x_{40}$         | 28     | $2^2 \cdot 7$          | $Z_{28}$                             | $()^2 \sim x_{26}, x_{27}$           |
| $x_{41}$                 | 29     | 29                     | $Z_{29}$                             |                                      |
| $x_{42}$                 | 30     | $2 \cdot 3 \cdot 5$    | $Z_{30}$                             | $()^3 \sim x_{17}, ()^5 \sim x_9$    |
| $x_{43}, x_{44}, x_{45}$ | 31     | 31                     | $Z_{31}$                             |                                      |
| $x_{46}, x_{47}$         | 33     | $2 \cdot 3 \cdot 11$   | $Z_{66}$                             | $()^3 \sim x_{19}$                   |
| $x_{48}, x_{49}$         | 35     | $5 \cdot 7$            | $Z_{35}$                             |                                      |
| $x_{50}, x_{51}, x_{52}$ | 37     | 37                     | $Z_{37}$                             |                                      |
| $x_{53}, x_{54}$         | 40     | $2^3 \cdot 5$          | $Z_{40}$                             | $()^5 \sim x_{15}$                   |
| $x_{55}, x_{56}$         | 42     | $2 \cdot 3 \cdot 7$    | $Z_{42}$                             | $()^7 \sim x_9$                      |
| $x_{57}, x_{58}, x_{59}$ | 43     | 43                     | $Z_{43}$                             |                                      |
| $x_{60}$                 | 44     | $2^2 \cdot 11$         | $Z_{44}$                             | $()^4 \sim x_{19}, ()^{11} \sim x_5$ |
| $x_{61}, x_{62}$         | 66     | $2 \cdot 3 \cdot 11$   | $Z_{66}$                             | $()^3 \sim x_{34}, ()^{11} \sim x_9$ |



(2.9) Lemma ([44]). Die Gruppe  $J$  hat folgende Charakt

[illegible]





|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2  | . | . | . | 1 | 1 | . | . | . | . | . | 3 | 3 | 1 | 1 | . | . | . | 2 | 1 | 1 |
| 3  | . | . | . | 1 | 1 | . | . | . | . | . | . | . | 1 | 1 | . | . | . | . | 1 | 1 |
| 9  | . | . | . | . | . | 1 | 1 | . | . | . | . | 1 | 1 | . | . | . | . | . | . | . |
| 7  | . | . | . | . | . | 1 | 1 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 11 | . | . | . | 1 | 1 | . | . | . | . | . | . | . | 1 | 1 | . | . | . | . | . | . |
| 23 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 1 | 1 | 1 |
| 29 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 31 | 1 | 1 | 1 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 17 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 43 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |

31A 31B 31C 33A 33B 35A 35B 37A 37B 37C 40A 40B 42A 42B 43A 43B 43C 44A 44B 44C

|      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| E.1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| E.2  | .  | .  | .  | -1 | -1 | A  | A  | 1  | 1  | 1  | 1  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  |
| E.3  | .  | .  | .  | -1 | -1 | A  | A  | 1  | 1  | 1  | 1  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  |
| E.4  | .  | .  | .  | 1  | 1  | -A | -A | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | A  | A  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| E.9  | .  | .  | .  | 1  | 1  | -A | -A | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | A  | A  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| E.6  | .  | .  | .  | 1  | 1  | A  | A  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | A  | A  | .  | .  | 1  | 1  |
| E.7  | .  | .  | .  | 1  | 1  | A  | A  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | A  | A  | .  | .  | 1  | 1  |
| E.8  | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | -1 | 1  |
| E.9  | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | -A | -A | 1  | 1  | 1  | 1  | -1 | -1 |
| E.10 | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | -A | -A | 1  | 1  | 1  | 1  | -1 | -1 |
| E.11 | -1 | -1 | -1 | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | -1 | -1 | -1 | -1 | .  | .  |
| E.12 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | A  | A  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.13 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | A  | A  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.14 | .  | .  | .  | -2 | -2 | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | -1 | .  |
| E.15 | .  | .  | .  | .  | .  | A  | A  | 1  | 1  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  |
| E.16 | .  | .  | .  | .  | .  | A  | A  | -1 | -1 | -1 | 1  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  |
| E.17 | .  | .  | .  | -1 | -1 | -A | -A | .  | .  | .  | -1 | -1 | -A | -A | .  | .  | 2  | 1  | 1  |
| E.18 | .  | .  | .  | -1 | -1 | -A | -A | .  | .  | .  | -1 | -1 | -A | -A | .  | .  | 2  | 1  | 1  |
| E.19 | .  | .  | .  | 1  | 1  | J  | J  | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | 1  |
| E.20 | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | -1 | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | 1  |
| E.21 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | -2 | -2 |
| E.22 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | .  | .  |
| E.23 | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | 1  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | -1 | -1 |
| E.24 | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | 1  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | -1 | -1 |
| E.25 | .  | .  | .  | 2  | 2  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.26 | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | -2 | .  | .  |
| E.27 | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  |
| E.28 | .  | .  | .  | 1  | 1  | -1 | -1 | .  | .  | .  | -1 | -1 | -1 | -1 | .  | .  | 1  | 1  | 1  |
| E.29 | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | 1  | -1 | -1 |
| E.30 | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | -1 | 1  | 1  |
| E.31 | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | .  | 2  | 1  | 1  |
| E.32 | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  |
| E.33 | .  | .  | .  | J  | J  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | 1  |
| E.34 | .  | .  | .  | J  | J  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | 1  |
| E.35 | .  | .  | .  | -1 | -1 | 1  | 1  | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | 1  |
| E.36 | 1  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | K  | K  | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | .  | .  |
| E.37 | 1  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | K  | K  | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | .  | .  |
| E.38 | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | -K | K  | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | 1  | 1  |
| E.39 | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | R  | K  | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | 1  | 1  |
| E.40 | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | -1 | .  | .  |
| E.41 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | -2 | -2 |
| E.42 | 1  | 1  | 1  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | -1 | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | .  | .  | .  |
| E.43 | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | -1 | -1 | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.44 | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | -1 | -1 | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.45 | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | .  | .  |
| E.46 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.47 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | L  | M  | O  | 1  | .  | .  |
| E.48 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | O  | L  | M  | 1  | .  | .  |
| E.49 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.50 | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | -1 | -1 | -1 |
| E.51 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | .  | .  |
| E.52 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.53 | -1 | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.54 | -1 | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | R  | P  | Q  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | 1  |
| E.55 | -1 | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | Q  | R  | P  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | 1  |
| E.56 | 1  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.57 | 1  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.58 | 1  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.59 | 1  | 1  | 1  | -1 | -1 | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.60 | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | -1 | -1 | -1 | -1 | 1  | 1  |
| E.61 | 1  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| E.62 | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | .  | .  | .  | .  | .  | .  | -1 | -1 | -1 | .  | .  | .  |

\* = EXP  
 \* = 7  
 \* = 7  
 \* = 7  
 \* = 7  
 \* = 12  
 \* = 5  
 \* = 5  
 \* = 33  
 \* = 33  
 \* = 5  
 \* = 43  
 \* = 43  
 \* = 37  
 \* = 37  
 \* = 37  
 \* = 31  
 \* = 31  
 \* = 31

```

(-71) / 2
4u4
(-71)
2u4
7)
5u4
((-71) / 2
0u4
(-71)
2u3

u2 -4u3
(5)
2 +4u3
(5)
1 +u5 -2u6 +2u7 -u9 +2u10 -u11 -u12 +2u13 -u15 +u16 -2u17 +2u19
131) / 2
-u5 +2u6 -2u7 +u9 -2u10 +u11 +u12 -2u13 +u15 -u16 +2u17 -2u19
131) / 2
u2 -2u3

1 -u5 -u6 -u7 -u9 -u10 -u12 -u13 -u14 -u15 -u17 -u18 -u19 -u20 -u23 -u24 -u25 -u26 -u28 -u29 -u30 -u31 -u33
u37 -u38 -u40
u5 +u6 +u10 +u12 +u14 +u20 +u23 +u24 +u31 +u33 +u37 +u38 +u40
u9 +u13 +u14 +u15 +u17 +u18 +u25 +u26 +u28 +u29 +u30 +u34 +u36
+u3 +u4 +u5 +u7 +u9 +u12 +u13 +u15 +u16 +u17 +u18 +u19 +u20 +u21 +u22 +u24 +u25 +u28 +u30 +u32 +u33 +u34

u9 -u12 -u15 -u16 -u17 -u20 -u21 -u22 -u25 -u28 -u35
u4 -u5 -u7 -u13 -u16 -u14 -u26 -u30 -u32 -u33 -u34
1 -u6 -u7 -u9 -u10 -u11 -u12 -u13 -u14 -u17 -u18 -u19 -u20 -u21 -u22 -u24 -u25 -u26 -u28
u9 +u10 +u11 +u13 +u18 +u20 +u21 +u22 +u26
u6 +u7 +u12 +u14 +u17 +u19 +u24 +u25 +u28

```

### §3 LOKALE UNTERGRUPPEN VON J

In diesem Paragraphen werden wir lokale Untergruppen von  $J$  untersuchen; zu diesem Zwecke wollen wir jedoch zunächst einige Bezeichnungen für Elemente und Untergruppen von  $J$  festlegen.

(3.1) Bezeichnungen. Bekanntlich enthält  $J$  eine Untergruppe  $L$  derart, daß  $V := O_2(L) \cong E(2^{10})$  ist und außerdem  $L = N_J(V) = V \cdot L_0$  mit  $L_0 \cong GL_5(2)$  ist; ferner operiert  $L_0$  irreduzibel auf der Gruppe  $V$ .

Wir identifizieren die Elemente von  $L_0$  mit den regulären  $5 \times 5$ -Matrizen über  $GF(2)$  und vereinbaren die folgenden Bezeichnungen:

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$r_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$d_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$j_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$t_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Von den oben angegebenen Elementen sind Involutionen:  
 $r_0, r_1, r_2, r_3, d_1, d_2, s_1, s_2, t_1, t_2, t_0, j_0, j_1, j_2$ ;  
 Elemente der Ordnung drei sind:  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ ;  
 Elemente der Ordnung fünf sind:  $f_0, f_1$ ;  
 Elemente der Ordnung sieben sind:  $q_0, q_1, q_2$ ;  
 das Element  $d_0$  hat die Ordnung 31.

Wir definieren nun für  $i \in \{1, 2\}$  die folgenden Untergruppen von  $L_0$ :

$$E_i = \langle r_0, r_i, d_i, t_i \rangle,$$

$$R_i = \langle r_0, r_1, r_2, r_3, d_i, s_i \rangle \quad \text{und}$$

$$T = \langle E_1, E_2, R_1, R_2 \rangle.$$

Dann ist  $T$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $L_0$  und es gelten die folgenden nichttrivialen Relationen zwischen den erzeugenden Involutionen von  $T$ :

$$\begin{aligned} [t_1, s_1] &= d_1, [t_1, r_3] = r_1, [t_1, r_2] = r_0, \\ [d_1, s_2] &= r_1, [d_1, d_2] = r_0, \\ [s_1, s_2] &= r_3, [s_1, d_2] = r_2, \\ [r_1, t_2] &= r_0, [r_3, t_2] = r_2, [s_2, t_2] = d_2. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt dann auch:

$$\begin{aligned} T' &= Z_3(T) = \langle r_0, r_1, r_2, r_3, d_1, d_2 \rangle, \\ Z_2(T) &= \langle r_0, r_1, r_2 \rangle \quad \text{und} \\ T'' &= Z(T) = \langle r_0 \rangle. \end{aligned}$$

Es ist ferner  $E_i = C_{L_0}(E_i) \simeq E(2^4)$  und  $R_i = C_{L_0}(R_i) \simeq E(2^6)$  für  $i \in \{1, 2\}$ ; die Gruppen  $E_1, E_2, R_1$  und  $R_2$  sind die einzigen maximalen abelschen Normalteiler von  $T$  und die Gruppe  $E_1 E_2$  ist die einzige extraspezielle Gruppe der Ordnung  $2^7$  in  $T$ .

Wir definieren nun zunächst noch weitere Untergruppen von  $L_0$ ; es sei

$$A_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & X & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \mid X \in GL_4(2) \right\}, \quad L_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & X & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \mid X \in GL_3(2) \right\},$$

$$A_2 := \left\{ \begin{pmatrix} & 0 \\ & 0 \\ X & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid X \in GL_4(2) \right\}, \quad L_2 := \left\{ \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid X \in GL_3(2) \right\},$$

$$A_0 := A_1 \cap A_2 = \langle r_3, s_1, s_2, q_0, a_0 \rangle,$$

$$A := \langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2, a_1, a_3, j_1 t_1, j_2 t_1, j_0 \rangle \quad \text{und}$$

$$B := \langle r_1, r_3 d_1, s_1, t_1 s_2, a_1 a_3, j_2 t_1 \rangle.$$

Es ist dann  $A_1 \cong A_2 \cong GL_4(2)$ ,  $A_0 \cong L_1 \cong L_2 \cong GL_3(2)$   
sowie  $B' = \langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2, a_1 a_3, j_2 t_1, f_0 \rangle \cong Alt_6$   
und  $B = B' \cdot \langle r_1 \rangle \cong Sym_6$   
und  $A = \langle B', j_0, a_4 \rangle \cong Alt_7$ .

Wohlbekannt sind dann die folgenden Fakten:

- (1) Ist  $i \in \{1, 2\}$ , so gilt  $N_{L_0}(E_i) = E_i \cdot A_i$  und  
 $N_{L_0}(R_i) = R_i \cdot [L_i \times \langle a_i, t_i \rangle]$  mit  $\langle a_i, t_i \rangle \cong Sym_3$ .
- (2) Die Elemente  $r_0$  und  $r_1 r_2$  sind Repräsentanten der  
beiden konjugierten Klassen von Involuntionen in  $L_0$ ;  
dabei ist  $C_{L_0}(r_0) = E_1 E_2 \cdot A_0$  und  
 $C_{L_0}(r_1 r_2) = R_1 R_2 \cdot \langle a_1 a_2, t_1 t_2 \rangle$ .

Aus [L] entnehmen wir schließlich noch die folgende  
Tatsache:

- (3) Es gibt Involuntionen  $u_1$  und  $w_1$  in  $V$  derart, daß  
 $(L \# V) = 155 u_1 + 868 w_1$  ist; die Repräsentanten  
 $u_1$  und  $w_1$  können so gewählt werden, daß o.B.d.A.  
 $C_{L_0}(u_1) = N_{L_0}(R_1)$  und  $C_{L_0}(w_1) = E_2 \cdot B$  ist.

Wir führen noch weitere Bezeichnungen für Elemente von  $V$   
ein; es sei

$$\begin{aligned} w_2 &= (w_1)^{j_0}, \quad u_2 = (u_1)^{q_0^2}, \quad u_3 = (u_1)^{q_0}, \\ u_4 &= (u_1)^{q_2}, \quad u_5 = (u_1)^{q_0 q_2}, \quad u_6 = u_1 w_2, \\ v_1 &= [u_1, q_0 q_1], \quad v_2 = [u_1, t_0 r_3 t_0], \quad v_3 = u_6 [u_6, q_1^6] \\ \text{und } v_4 &= u_6 [u_6, q_1^5]; \text{ außerdem setzen wir} \\ w_3 &= (w_1)^{a_1}, \quad w_4 = (w_1)^{a_2}, \quad w_5 = (w_1)^{q_1}, \\ w_6 &= (w_1)^{q_1^2} \quad \text{und} \quad w_7 = (w_1)^{q_1^3}. \end{aligned}$$

In [L] finden wir dann die folgenden Relationen:

$$(4) \quad w_1 = u_3 u_4, \quad w_3 = w_1 u_2 u_5, \quad w_4 = w_1 v_1,$$

$$w_5 = u_1 u_5 v_1, \quad w_6 = u_1 u_2 u_5 v_2, \quad w_7 = w_1 u_2 u_5 v_2.$$

Wir setzen ferner  $U_0 := \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \rangle$  und  $V_1 := \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ . Aus [L] entnehmen wir, daß  $U_0 \cong E(2^6)$  und  $V_1 \cong E(2^4)$  sowie  $V = U_0 \times V_1$  ist.

Wir können jetzt die Operation von  $L_0$  auf  $V$  beschreiben; dazu geben wir an, wie ein Element aus  $L_0$  auf den Erzeugenden  $u_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) und  $v_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) von  $V$  per Konjugation operiert. Die Aussagen des folgenden Lemmas entnehmen wir [L] oder bestätigen sie durch einfaches Nachrechnen.

### (3.2) Lemma.

(a) Es ist  $C_V(d_0) = \langle 1 \rangle$  und  $C_V(f_0) = \langle w_1, w_2 \rangle$  sowie

$$\begin{aligned} d_0: \quad & u_1 \rightarrow u_4 u_5, \quad u_2 \rightarrow u_4 u_5 u_6 v_4, \quad u_3 \rightarrow u_1 u_3 u_4 u_5 u_6, \\ & u_4 \rightarrow u_4 u_6 v_2 v_4, \quad u_5 \rightarrow u_3 v_2 v_4, \quad u_6 \rightarrow u_2 u_3 u_4 u_6 v_1 v_3, \\ & v_1 \rightarrow u_4 u_5 v_4, \quad v_2 \rightarrow v_2 v_4, \quad v_3 \rightarrow u_4 u_6 v_3, \quad v_4 \rightarrow u_3 u_4 u_6 v_1 v_3 \quad \text{und} \\ f: \quad & u_1 \rightarrow u_1 u_2, \quad u_2 \rightarrow u_1 u_2 u_5 u_6, \quad u_3 \rightarrow u_1 u_2 u_4, \quad u_5 \rightarrow u_1 u_3, \\ & v_1 \rightarrow v_2 v_3, \quad v_2 \rightarrow v_1, \quad v_3 \rightarrow v_1 v_3 v_4, \quad v_4 \rightarrow v_3. \end{aligned}$$

(b) Es ist  $C_V(q_0) = \langle v_1 \rangle$ ,  $C_V(q_1) = \langle u_1 \rangle$ ,  $C_V(q_2) = \langle v_4 \rangle$ ,

$$\begin{aligned} q_0: \quad & u_1 \rightarrow u_3, \quad u_2 \rightarrow u_1 u_3, \quad u_3 \rightarrow u_2, \quad u_4 \rightarrow u_4 u_5, \quad u_5 \rightarrow u_5 u_6, \\ & u_6 \rightarrow u_4 u_5 u_6, \quad v_2 \rightarrow v_2 v_4, \quad v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_2 v_3 v_4 \quad \text{sowie} \\ q_1: \quad & u_2 \rightarrow u_1 u_2 u_3, \quad u_3 \rightarrow u_1 v_1, \quad u_4 \rightarrow u_5 \rightarrow u_5 v_2, \quad u_6 \rightarrow v_3 v_4, \\ & v_1 \rightarrow u_2, \quad v_2 \rightarrow u_4, \quad v_3 \rightarrow u_6, \quad v_4 \rightarrow v_3 \quad \text{und} \\ q_2: \quad & u_1 \rightarrow u_4 \rightarrow u_2 \rightarrow u_1 u_4, \quad u_3 \rightarrow u_5 \rightarrow u_2 u_6, \quad u_6 \rightarrow u_1 u_3 u_6, \\ & v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1 v_3. \end{aligned}$$

(c) Für die Elemente  $a_i$  ( $0 \leq i \leq 3$ ), gilt folgendes:

$$C_V(a_0) = \langle u_1 u_2 u_3, u_4, v_1, v_3 v_4 \rangle \text{ und}$$

$$a_0: u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_1 u_2, u_5 \rightarrow u_6 \rightarrow u_5 u_6, v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 v_3;$$

$$C_V(a_1) = \langle u_1, u_6, v_3, v_4 \rangle \text{ und}$$

$$a_1: u_2 \rightarrow u_2 u_4 \rightarrow u_4, u_3 \rightarrow u_3 u_4 u_5, u_5 \rightarrow u_1 u_2 u_3, v_1 \rightarrow v_1 v_2 \rightarrow v_2;$$

$$C_V(a_2) = \langle u_1, u_2, u_4, v_4 \rangle \text{ und}$$

$$a_2: u_3 \rightarrow u_3 v_1, u_5 \rightarrow u_5 v_2, u_6 \rightarrow u_6 v_3, v_1 \rightarrow u_1 u_3, v_2 \rightarrow u_4 u_5, v_3 \rightarrow u_6;$$

$$C_V(a_3) = \langle u_1, u_6, v_1, v_2 \rangle \text{ und}$$

$$a_3: u_2 \rightarrow u_1 u_2 u_3, u_3 \rightarrow u_1 u_2, u_4 \rightarrow u_5 \rightarrow u_4 u_5, v_3 \rightarrow v_3 v_4 \rightarrow v_4;$$

$$C_V(a_1 a_3) = \langle u_1, u_3 u_4, u_2 u_5, u_6 \rangle \text{ und}$$

$$a_1 a_3: u_2 \rightarrow u_1 u_2 u_3 u_5, u_3 \rightarrow u_1 u_2 u_4, u_4 \rightarrow u_1 u_2 u_3, u_5 \rightarrow u_1 u_3, \\ v_1 \rightarrow v_1 v_2, v_2 \rightarrow v_1, v_3 \rightarrow v_3 v_4, v_4 \rightarrow v_3.$$

(d) Die erzeugenden Involutionen von  $T$  operieren wie folgt auf der Gruppe  $V$ :

$$C_V(r_0) = U_0 \langle v_1 \rangle, \quad r_0: v_2 \rightarrow u_1 v_2, v_3 \rightarrow u_2 v_3, v_4 \rightarrow u_1 u_3 v_4;$$

$$C_V(r_2) = U_0 \langle v_2 \rangle, \quad r_2: v_1 \rightarrow u_1 v_1, v_3 \rightarrow u_4 v_3, v_4 \rightarrow u_4 u_5 v_4;$$

$$C_V(d_2) = U_0 \langle v_3 \rangle, \quad d_2: v_1 \rightarrow u_2 v_1, v_2 \rightarrow u_4 v_2, v_4 \rightarrow u_6 v_4;$$

$$C_V(t_2) = U_0 \langle v_4 \rangle, \quad t_2: v_1 \rightarrow u_1 u_3 v_1, v_2 \rightarrow u_4 u_5 v_2, v_3 \rightarrow u_6 v_3;$$

$$C_V(r_1) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3 \rangle \text{ und}$$

$$r_1: u_5 \rightarrow u_1 u_5, u_6 \rightarrow u_2 u_6, v_4 \rightarrow v_1 v_4;$$

$$C_V(r_3) = \langle u_1, u_2, u_4, u_5, v_1, v_2, v_3 \rangle \text{ und}$$

$$r_3: u_3 \rightarrow u_1 u_3, u_6 \rightarrow u_4 u_6, v_4 \rightarrow v_2 v_4;$$

$$C_V(s_2) = \langle u_1, u_2, u_4, u_6, v_1, v_2, v_3 \rangle \text{ und}$$

$$s_2: u_3 \rightarrow u_2 u_3, u_5 \rightarrow u_4 u_5, v_4 \rightarrow v_3 v_4;$$

$$C_V(d_1) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 u_5, v_1, v_2, v_4 \rangle \text{ und}$$

$$d_1: u_4 \rightarrow u_1 u_4, u_6 \rightarrow u_1 u_3 u_6, v_3 \rightarrow v_1 v_3;$$

$$C_V(s_1) = \langle u_1, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2, v_4 \rangle \text{ und}$$

$$s_1: u_2 \rightarrow u_1 u_2, u_6 \rightarrow u_4 u_5 u_6, v_3 \rightarrow v_2 v_3;$$

$$C_V(t_1) = \langle u_1, u_2, u_3, u_6, v_1, v_3, v_4 \rangle \text{ und}$$

$$t_1: u_4 \rightarrow u_2 u_4, u_5 \rightarrow u_1 u_2 u_3 u_5, v_2 \rightarrow v_1 v_2.$$



(3.3) Bezeichnungen. Wir definieren weitere Untergruppen von  $V \cdot T$ ; es sei

$$V_e := \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2 \rangle,$$

$$V^* := U_0 \cdot \langle v_1, v_2, v_3 \rangle,$$

$$E := \langle V_e, R_1 \rangle,$$

$$R := \langle V^*, R_2 \rangle,$$

$$U_1 := U_0 \times \langle v_1 r_0, v_2 r_2, v_3 d_2 \rangle,$$

$$U^* := U_1 \times \langle v_4 t_2 \rangle \quad \text{und}$$

$$W := U_0 \times E_2.$$

Nach [L] wissen wir, daß  $E$  extraspeziell der Ordnung  $2^{13}$  ist mit  $Z(E) = E' = \langle u_1 \rangle$  und daß  $R$  speziell von der Ordnung  $2^{15}$  ist mit  $Z(R) = R' = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$ ; ferner gilt  $V^* \cong U_1 \cong E(2^9)$  und  $W \cong U^* \cong E(2^{10})$  sowie  $VW = VU^* = WU^* = V \cdot E_2 = W \cdot V_1 = U^* \cdot E_2$  und  $N_L(W) = N_L(U^*) = V \cdot E_2 \cdot A_2$ .

Mit  $S$  bezeichnen wir eine feste Sylow 2-Untergruppe von  $J$ , welche  $VT$  mit Index zwei enthält. Nach [L] gibt es dann eine Involution  $s$  in  $S - VT$  mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) \quad S = (V \cdot T) \cdot \langle s \rangle, \quad V^S = W, \quad C_{VT}(s) = U^* \cdot \langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2 \rangle;$$

$$s: \quad r_0 \rightarrow v_1, \quad r_2 \rightarrow v_2, \quad d_2 \rightarrow v_3, \quad t_2 \rightarrow v_4, \\ r_1 \rightarrow w_1 r_1, \quad r_3 \rightarrow u_1 u_2 u_5 r_3, \quad s_2 \rightarrow w_2 s_2, \\ d_1 \rightarrow w_1 u_2 u_5 d_1, \quad s_1 \rightarrow w_1 s_1, \quad t_1 \rightarrow w_2 t_1.$$

$$(2) \quad N_J(VW) = (V \cdot E_2 \cdot A_2) \cdot \langle s \rangle = (V E_2 \cdot \langle s \rangle) \cdot A_2 = (U^* \times \langle s \rangle) \cdot E_2 \cdot A_2, \\ C_{A_2}(s) = A \cong \text{Alt}_7 \quad \text{und} \quad [A_2, \langle s \rangle] = U_0; \quad \text{ferner gilt} \\ [q_0, s] = u_1 u_2 w_1 u_6 \quad \text{und} \quad [q_2, s] = w_1.$$

Schließlich definieren wir noch folgende Untergruppen von  $S$ :

$$U := U^* \times \langle s \rangle \quad \text{und}$$

$$U_e := U \cap E = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1 r_0, v_2 r_2 \rangle.$$

Dann ist  $U \cong E(2^{11})$ ,  $E = U_e \cdot R_1$ ,  $UE = U \cdot R_1$  und  $UR = U \cdot R_2$ ,  $R = U_1 \cdot R_2$  sowie  $S = U \cdot T$ .

Im weiteren Verlaufe dieser Arbeit werden wir oftmals Kenntnisse über die Operation von Elementen aus  $S$  auf der Untergruppe  $U$  benötigen; wir stellen daher diese und weitere Informationen über die Sylow 2-Untergruppe  $S$  von  $J$  in dem folgenden Lemma zusammen.

(3.4) Lemma.

(a)  $E$  ist die einzige extraspezielle Untergruppe von der Ordnung  $2^{13}$  in  $S$ ; ferner gilt  $C_J(E) = Z(E) = \langle u_1 \rangle$  und  $H := C_J(u_1) = N_J(E) = E \cdot H_0$  mit  $H_0 = N_J(\langle a_1 \rangle)$  und  $H_0 \cong \widehat{\text{Aut}}(M_{22})$ .

(b)  $U$  ist die einzige elementar-abelsche Untergruppe von der Ordnung  $2^{11}$  in  $S$ . Es gilt  $C_J(U) = U$  und  $M := N_J(U) = U \cdot M_0$  mit  $M_0 \cong M_{24}$ .

(c) Ist  $X$  eine elementar-abelsche Untergruppe von der Ordnung  $2^{10}$  in  $S$ , welche nicht in  $U$  enthalten ist, so gilt  $X \in \{V, W\}$  und  $C_J(X) = X$  sowie  $W = V^S$ .

(d) Ist  $X$  ein zu  $R$  isomorpher Normalteiler von  $S$ , so gilt  $X = R$ ; außerdem ist  $C_J(R) = Z(R)$  und  $K := N_J(R)$  ist eine nichtzerfallende Erweiterung von  $R$  mit einer Gruppe isomorph zu  $\text{Sym}_5 \times L_3(2)$ . Ferner enthält  $K$  Untergruppen, welche zu  $\text{Sym}_5$  bzw. zu  $L_3(2)$  isomorph sind.

(e) Es ist  $S' = [U, T] \cdot T' = U^* \cdot T'$ ,  $S'' = [U^*, T'] \cdot T'' = U_0 \langle v_1 r_0, v_2 r_2, r_0 \rangle$  und  $S'' = Z(S) = \langle u_1 \rangle$ . Ferner gilt  $Z_2(S) = \langle u_1, u_2 \rangle$ ,  $Z_3(S) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$  sowie  $Z_4(S) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1 r_0 \rangle$ ,  $Z_5(S) = S''$ ,  $Z_6(S) = U_1 \cdot \langle r_0, r_1, r_2 \rangle$  und  $Z_7(S) = S'$ .

Setzt man  $Z_0(S) = \langle 1 \rangle$  und  $Z_1(S) = Z(S)$ , so gilt für alle  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$  dann  $[Z_i(S), S] = Z_{i-1}(S)$ .

(f) In der folgenden Liste beschreiben wir die Operation von Elementen aus  $T$  auf der Gruppe  $U$ . Es gilt:

$$C_U(r_0) = U_0 \cdot \langle v_1 r_0 \rangle \quad \text{und}$$

$$r_0: v_2 r_2 \rightarrow u_1 v_2 r_2, v_3 d_2 \rightarrow u_2 v_3 d_2, v_4 t_2 \rightarrow u_1 u_3 v_4 t_2, s \rightarrow v_1 r_2 s;$$

$$C_U(r_2) = U_0 \cdot \langle v_2 r_2 \rangle \quad \text{und}$$

$$r_2: v_1 r_0 \rightarrow u_1 v_1 r_0, v_3 d_2 \rightarrow u_4 v_3 d_2, v_4 t_2 \rightarrow u_4 u_5 v_4 t_2, s \rightarrow v_2 r_2 s;$$

$$C_U(d_2) = U_0 \cdot \langle v_3 d_2 \rangle \quad \text{und}$$

$$d_2: v_1 r_0 \rightarrow u_2 v_1 r_0, v_2 r_2 \rightarrow u_4 v_2 r_2, v_4 t_2 \rightarrow u_6 v_4 t_2, s \rightarrow v_3 d_2 s;$$

$$C_U(t_2) = U_0 \cdot \langle v_4 t_2 \rangle \quad \text{und}$$

$$t_2: v_1 r_0 \rightarrow u_1 u_3 v_1 r_0, v_2 r_2 \rightarrow u_4 u_5 v_2 r_2, v_3 d_2 \rightarrow u_6 v_3 d_2, s \rightarrow v_4 t_2 s;$$

$$C_U(r_1) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, v_1 r_0, v_2 r_2, v_3 d_2 \rangle \quad \text{und}$$

$$r_1: u_5 \rightarrow u_1 u_5, u_6 \rightarrow u_2 u_6, v_4 t_2 \rightarrow u_1 u_3 v_1 r_0 v_4 t_2, s \rightarrow w_1 s;$$

$$C_U(r_3) = \langle u_1, u_2, u_4, u_5, v_1 r_0, v_2 r_2, v_3 d_2 \rangle \quad \text{und}$$

$$r_3: u_3 \rightarrow u_1 u_3, u_6 \rightarrow u_4 u_6, v_4 t_2 \rightarrow u_4 u_5 v_2 r_2 v_4 t_2, s \rightarrow u_1 u_2 u_5 s;$$

$$C_U(s_2) = \langle u_1, u_2, u_4, u_6, v_1 r_0, v_2 r_2, v_3 d_2 \rangle \quad \text{und}$$

$$s_2: u_3 \rightarrow u_2 u_3, u_5 \rightarrow u_4 u_5, v_4 t_2 \rightarrow u_6 v_3 d_2 v_4 t_2, s \rightarrow w_2 s;$$

$$C_U(s_1) = \langle u_1, u_3, u_4, u_5, v_1 r_0, v_2 r_2, v_4 t_2 \rangle \quad \text{und}$$

$$s_1: u_2 \rightarrow u_1 u_2, u_6 \rightarrow u_4 u_5 u_6, v_3 d_2 \rightarrow u_4 v_2 r_2 v_3 d_2, s \rightarrow w_1 s;$$

$$C_U(d_1) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 u_5, v_1 r_0, v_2 r_2, v_4 t_2 \rangle \quad \text{und}$$

$$d_1: u_5 \rightarrow u_1 u_5, u_6 \rightarrow u_1 u_3 u_6, v_3 d_2 \rightarrow u_2 v_1 r_0 v_3 d_2, s \rightarrow w_1 u_2 u_5 s;$$

$$C_U(t_1) = \langle u_1, u_2, u_3, u_6, v_1 r_0, v_3 d_2, v_4 t_2 \rangle \quad \text{und}$$

$$t_1: u_4 \rightarrow u_2 u_4, u_5 \rightarrow u_1 u_2 u_3 u_5, v_2 r_2 \rightarrow u_1 v_1 r_0 v_2 r_2, s \rightarrow w_2 s;$$

$$C_U(r_1 r_2) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 v_1 r_0, v_2 r_2 \rangle \quad \text{und}$$

$$r_1 r_2: u_5 \rightarrow u_1 u_5, u_6 \rightarrow u_2 u_6, v_3 d_2 \rightarrow u_4 v_3 d_2, v_4 t_2 \rightarrow w_1 u_5 v_1 r_0 v_4 t_2, \\ s \rightarrow w_1 v_2 r_2 s;$$

$$C_U(r_1 r_3 d_1) = \langle u_1, u_2, u_3 u_4, u_5, v_1 r_0, v_2 r_2, s \rangle \quad \text{und}$$

$$r_1 r_3 d_1: u_4 \rightarrow u_1 u_4, u_6 \rightarrow u_2 w_1 u_6, v_3 d_2 \rightarrow u_2 v_1 r_0 v_3 d_2, \\ v_4 t_2 \rightarrow u_3 u_4 u_5 v_1 r_0 v_2 r_2 v_4 t_2;$$

$$C_U(r_1 s_1) = \langle u_1, u_3, u_4, u_2 u_5, v_1 r_0, v_2 r_2, s \rangle \quad \text{und}$$

$$r_1 s_1: u_5 \rightarrow u_1 u_5, u_6 \rightarrow u_1 u_2 u_4 u_5 u_6, v_3 d_2 \rightarrow u_4 v_2 r_2 v_3 d_2, \\ v_4 t_2 \rightarrow u_1 u_3 v_1 r_0 v_4 t_2;$$

$$C_U(t_1 s_2) = \langle u_1, u_2, u_3 u_4, u_6, v_1 r_0, v_3 d_2, s \rangle \quad \text{und}$$

$$t_1 s_2: u_4 \rightarrow u_2 u_4, u_5 \rightarrow u_1 w_1 u_5, v_2 r_2 \rightarrow u_1 v_1 r_0 v_2 r_2, \\ v_4 t_2 \rightarrow u_6 v_3 d_2 v_4 t_2.$$

Beweis. Die Aussagen in den Teilen (a) - (c) entnehmen wir [J] und [L]. Die Behauptungen in (e) und (f) ergeben sich durch einfache Rechnungen aus den Relationen in (3.2) und (3.3).

Es sei nun  $X$  ein zu  $R$  isomorpher Normalteiler von  $S$ . Dann gilt  $E(2^3) \approx Z(X) \trianglelefteq S$  und somit  $Z(X) \leq U$ . Nun ist klar, daß  $X \cap U \approx E(2^9)$  und  $X/(X \cap U) \approx E(2^6)$  ist. Da  $Z(UR_1) = \langle u_1 \rangle$  ist, folgt  $UX = U \cdot R_2$  und  $Z(X) = Z(R)$ . Aus (f) berechnet man nun, daß  $U_1 = (UR_2)' = \{x \in U \mid [x, R_2] \leq Z(R)\}$  ist. Daraus folgt zunächst  $X \cap U = U_1$ . Da für  $y \in \{r_0, r_1, r_2, r_3, d_2, s_2\}$  stets  $C_U(y) \leq U_1$  ist, folgt schließlich  $X = R$ . Die weiteren Aussagen in (d) entnehmen wir [J].

Q.E.D.

(3.5) Bezeichnungen. Im weiteren Verlaufe dieser Arbeit wollen wir die in Lemma (3.4) eingeführten Bezeichnungen beibehalten. Es sei also

$$\begin{aligned} H &:= C_J(u_1) \quad \text{und} \quad H_0 := N_J(\langle a_1 \rangle), \\ M &:= N_J(U) = U \cdot M_0 \quad \text{mit} \quad M_0 \approx M_{24} \quad \text{und} \\ K &:= N_J(R). \end{aligned}$$

Nach (2.8) besitzt  $J$  genau zwei konjugierten Klassen von Involuntoren. Aus [L] können wir entnehmen, daß  $u_1$  und  $w_1$  Repräsentanten dieser beiden Klassen sind. Wir setzen dann

$$\begin{aligned} H_1 &:= C_J(w_1) \quad \text{und} \\ S_2 &:= U \cdot E_2 \cdot (\langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2 \rangle \times \langle r_1 \rangle). \end{aligned}$$

Dann gilt  $H_1 = U \cdot M_1 \leq M$  mit  $M_1 \approx \text{Aut}(M_{22})$ ; ferner ist  $S_2$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $H_1$  mit  $Z(S_2) = \langle u_1, w_1 \rangle$ .

(3.6) Lemma. (a) Es gibt die folgenden T-Bahnen auf V :

| Repräs. y               | $ ccl_T(y) $ | $C_T(y)$                                                               | y ~   |
|-------------------------|--------------|------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1                       | 1            | T                                                                      | -     |
| $u_1$                   | 1            | T                                                                      | $u_1$ |
| $u_2$                   | 2            | $E_1 E_2 R_2$                                                          | $u_1$ |
| $u_3$                   | 4            | $E_1 E_2 \cdot \langle s_1 \rangle$                                    | $u_1$ |
| $u_4$                   | 4            | $E_2 R_2 \cdot \langle s_1 \rangle$                                    | $u_1$ |
| $w_1 = u_3 u_4$         | 4            | $E_2 \cdot \langle r_1, r_3 d_1, s_1, t_1 s_2 \rangle$                 | $w_1$ |
| $u_5$                   | 8            | $E_2 \cdot \langle r_3, r_1 d_1, s_1 \rangle$                          | $u_1$ |
| $w_3 = w_1 u_2 u_5$     | 8            | $E_2 \cdot \langle r_1 r_3, d_1, r_1 s_1 \rangle$                      | $w_1$ |
| $u_6$                   | 16           | $E_2 \cdot \langle t_1, s_2 \rangle$                                   | $u_1$ |
| $w_2 = u_1 u_6$         | 16           | $E_2 \cdot \langle t_1, s_2 \rangle$                                   | $w_1$ |
| $v_1$                   | 8            | $E_1 \cdot \langle r_3, s_1, s_2 \rangle$                              | $u_1$ |
| $w_4 = w_1 v_1$         | 8            | $\langle r_0, r_1, r_2 r_3, r_3 d_1, s_1, t_1 s_2, t_1 d_2 \rangle$    | $w_1$ |
| $w_5 = u_1 u_5 v_1$     | 16           | $\langle r_0, r_1 r_2, r_3, r_1 d_1, s_1, d_2 t_1 t_2 \rangle$         | $w_1$ |
| $u_6 v_1$               | 32           | $\langle r_0, d_1 t_2, r_1 d_2, t_1, s_2 \rangle$                      | $w_1$ |
| $v_2$                   | 16           | $\langle r_1, r_2, r_3, d_1, s_1, s_2 \rangle$                         | $u_1$ |
| $w_6 = u_1 u_2 u_5 v_2$ | 16           | $\langle r_0 r_1, r_2, r_3, r_0 d_1, r_0 s_1, d_2 s_2 \rangle$         | $w_1$ |
| $w_7 = w_1 u_2 u_5 v_2$ | 32           | $\langle r_0 r_1, r_2, r_0 r_3, d_1, r_0 s_1 \rangle$                  | $w_1$ |
| $u_6 v_2$               | 64           | $\langle r_2 \rangle \times \langle r_2 r_3 d_2, s_2, s_1 t_2 \rangle$ | $w_1$ |
| $v_3$                   | 32           | $\langle r_1, r_3, d_2, s_2, t_1 \rangle$                              | $u_1$ |
| $u_1 v_3$               | 32           | $\langle r_1, r_3, d_2, s_2, t_1 \rangle$                              | $w_1$ |
| $u_3 v_3$               | 64           | $\langle r_1, d_2, r_0 s_2, t_1 \rangle$                               | $w_1$ |
| $u_5 v_3$               | 128          | $\langle r_3, d_2, r_2 s_2 \rangle$                                    | $w_1$ |
| $v_4$                   | 64           | $\langle d_1, s_1, t_1, t_2 \rangle$                                   | $u_1$ |
| $u_1 v_4$               | 64           | $\langle d_1, s_1, t_1, t_2 \rangle$                                   | $w_1$ |
| $u_2 v_4$               | 128          | $\langle d_1, t_1, t_2 \rangle$                                        | $w_1$ |
| $u_4 v_4$               | 256          | $\langle d_1, t_2 \rangle$                                             | $w_1$ |

(b) Es gibt die folgenden I-Bahnen auf  $U - U_0$  :

| Repräs. $y$   | $ ccl_T(y) $ | $C_T(y)$                                                                    | $y \sim$ |
|---------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|----------|
| $v_1 r_0$     | 8            | $E_1 \cdot \langle r_3, s_1, s_2 \rangle$                                   | $w_1$    |
| $w_1 v_1 r_0$ | 8            | $\langle r_0, r_1, r_2 r_3, r_3 d_1, s_1, t_1 s_2, t_1 d_2 \rangle$         | $u_1$    |
| $u_5 v_1 f_0$ | 16           | $\langle r_0, r_1 r_2, r_3, r_1 d_1, s_1, d_2 t_1 t_2 \rangle$              | $u_1$    |
| $u_6 v_1 r_0$ | 32           | $\langle r_0, t_1 \rangle \times \langle r_0 r_1 d_2, s_2, d_1 t_2 \rangle$ | $u_1$    |
| $v_2 r_2$     | 16           | $\langle r_1, r_2, r_3, d_1, s_1, s_2 \rangle$                              | $w_1$    |
| $u_2 v_2 r_2$ | 16           | $\langle r_1, r_2, r_3, d_1, r_0 s_1, s_2 \rangle$                          | $u_1$    |
| $u_3 v_2 r_2$ | 32           | $\langle r_1, r_2, r_0 r_3, d_1, s_1 \rangle$                               | $u_1$    |
| $u_6 v_2 r_2$ | 64           | $\langle r_2, r_3 d_2, s_2, s_1 t_2 \rangle$                                | $u_1$    |
| $v_3 d_2$     | 32           | $\langle r_1, r_3, d_2, s_2, t_1 \rangle$                                   | $w_1$    |
| $u_1 v_3 d_2$ | 32           | $\langle r_1, r_3, d_2, s_2, t_1 \rangle$                                   | $u_1$    |
| $u_3 v_3 d_2$ | 64           | $\langle r_1, r_0 r_2, d_2, t_1 \rangle$                                    | $u_1$    |
| $u_5 v_3 d_2$ | 128          | $\langle r_3, d_2, r_2 s_2 \rangle$                                         | $u_1$    |
| $v_4 t_2$     | 64           | $\langle t_2, d_1, s_1, t_1 \rangle$                                        | $w_1$    |
| $u_1 v_4 t_2$ | 64           | $\langle t_2, d_1, s_1, t_1 \rangle$                                        | $u_1$    |
| $u_2 v_4 t_2$ | 128          | $\langle t_2, t_1, d_1 \rangle$                                             | $u_1$    |
| $u_4 v_4 t_2$ | 256          | $\langle t_2, s_1 \rangle$                                                  | $u_1$    |
| $s$           | 128          | $\langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2 \rangle$                             | $w_1$    |
| $u_1 s$       | 128          | $\langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2 \rangle$                             | $u_1$    |
| $u_2 s$       | 256          | $\langle r_1 r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$                                      | $u_1$    |
| $u_3 s$       | 512          | $\langle r_1 s_1 \rangle$                                                   | $u_1$    |

Beweis. Die Aussagen in (a) sind in [L] enthalten. Die Aussagen in Teil (b) verifiziert man mittels einfacher Rechnungen aus den Relationen, die in (3.4) gegeben sind.

Q.E.D.

(3.7) Lemma. (a) Es gilt  $(M \# U) = 1771 u_1 + 276 w_1$ .

Dabei ist  $C_M(w_1) = H_1$  und  $C_M(u_1) = M \wedge H$  mit  $O_2(M \wedge H) = UE$  sowie  $(M \wedge H)/U \cong E(2^6) \cdot \hat{3}Sym_6$  und  $(M \wedge H)/E \cong E(2^4) \cdot \hat{3}Sym_6$ .  
Ferner ist  $UE = U \cdot R_1 = E \cdot \langle u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, s \rangle$ .

(b) Es ist  $M \wedge L = V \cdot E_2 \cdot A_2 = U^* \cdot E_2 \cdot A_2 = U^* \cdot V_1 \cdot A_2 = W \cdot V_1 \cdot A_2$   
und  $N_3(M \wedge L) = (M \wedge L) \cdot \langle s \rangle = U \cdot E_2 \cdot A_2$ . ferner ist  $(UE_2)' = U^*$   
und  $Z(VE_2) = Z(UE_2) = [V, E_2] = [U^*, E_2] = U_0$ .

(c) In  $UE_2$  gibt es genau die folgenden nichttrivialen  $A_2$ -invarianten Untergruppen:  $V_1, E_2, U_0, U_0 \langle s \rangle, V = U_0 \times V_1, W = U_0 \times E_2, U^*, U$  und  $VW = VE_2$ .

Insbesondere operiert  $A_2$  unzerlegbar auf  $U^*$  und  $U$ .

(d) Es gelten die folgenden Aussagen:

$$(A_2 \# U_0) = 35 u_1 + 28 w_1;$$

$$(A_2 \# \langle s \cdot U_0 \rangle) = 8 s + 56 u_1 s;$$

$$(A_2 \# (V - U_0)) = 15 v_1 + 105 u_1 v_1 + 420 w_1 v_1 + 420 u_4 v_1;$$

$$(A_2 \# (U^* - U_0)) = 15 v_1 r_0 + 105 u_1 v_1 r_0 + 420 w_1 v_1 r_0 + 420 u_4 v_1 r_0;$$

$$(A_2 \# (U - U^*)) = 8 s + 56 u_1 s + 120 v_1 r_0 s + 840 u_1 v_1 r_0 s;$$

$$(E_2 A_2 \# (V - U_0)) = 120 v_1 + 840 w_1 v_1;$$

$$(E_2 A_2 \# (U^* - U_0)) = 120 v_1 r_0 + 840 w_1 v_1 r_0;$$

$$(E_2 A_2 \# (U - U^*)) = 128 s + 896 u_1 s.$$

Außerdem liegt in  $J$  die folgende Fusion vor:

$$u_1 \sim u_1 s \sim v_1 \sim u_1 v_1 \sim w_1 v_1 r_0 \sim u_4 v_1 r_0 \sim u_1 v_1 r_0 s \quad \text{und}$$

$$w_1 \sim s \sim w_1 v_1 \sim u_4 v_1 \sim v_1 r_0 \sim u_1 v_1 r_0 \sim v_1 r_0 s.$$

Beweis. Die Aussagen in (a) und (b) werden in [L] bewiesen ebenso wie die Tatsache, daß  $A_2$  unzerlegbar auf  $U^*$  und  $U$  operiert und daß die in (c) angegebenen Gruppen alle  $A_2$ -invariant sind; ferner wissen wir, daß  $U_0, V_1$  und  $E_2$  irreduzible  $A_2$ -Moduln sind.

Setzen wir  $Y = UE_2$ , so gilt dann  $N_Y(V_1) = V$  und  $N_Y(E_2) = W$  sowie  $N_Y(V) = N_Y(W) = VE_2$  und  $N_Y(U_0\langle s \rangle) = U$ . Wir vermerken noch, daß  $Q := \langle q_0 \rangle \in \text{Syl}_7(A_2)$  ist und daß  $C_Y(Q) = \langle v_1, r_0, \tilde{s} \rangle$  mit  $\tilde{s} \in sU_0$  ist. Außerdem gilt dann  $\langle \text{ccl}_{A_2}(\tilde{s}) \rangle = U_0\langle s \rangle$ ,  $\langle \text{ccl}_{A_2}(v_1 r_0) \rangle = U^*$  und  $\langle \text{ccl}_{A_2}(v_1 r_0 \tilde{s}) \rangle = U$ . Damit folgt sofort, daß es in  $Y$  nur die angegebenen nicht-trivialen  $A_2$ -invarianten Untergruppen gibt.

Um die Behauptungen in (d) zu beweisen, berechnen wir die entsprechenden Zentralisatoren; dazu setzen wir  $X = A_2$  und  $Y = E_2 A_2$ . Durch einfache Rechnungen findet man dann folgendes:

$$C_X(u_1) = \langle r_1, r_3, d_1, s_1 \rangle \cdot \langle \langle a_1, t_1 \rangle \times \langle a_3, s_2 \rangle \rangle \cong E(2^4) \cdot (\text{Sym}_3 \times \text{Sym}_3) ;$$

$$C_X(w_1) = B \cong \text{Sym}_6 \quad \text{und} \quad C_Y(s) = C_X(s) = A \cong \text{Alt}_7 ;$$

$$C_Y(u_1 s) = C_X(u_1 s) = \langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, a_1 a_3, j_0 j_2 r_1 \rangle \times \langle a_1 a_3^2 \rangle \cdot \langle t_1 s_2 \rangle \\ \cong (\text{Alt}_5 \times Z_3) \cdot Z_2 ;$$

$$C_X(v_1) = C_X(v_1 r_0) = \langle r_1, d_1, t_1 \rangle \cdot A_0 \cong E(2^3) \cdot L_3(2) ;$$

$$C_X(u_1 v_1) = C_X(u_1 v_1 r_0) = \langle r_1, d_1, t_1 \rangle \cdot \langle r_3, s_1, a_3, s_2 \rangle \cong E(2^3) \cdot \text{Sym}_4 ;$$

$$C_X(w_1 v_1) = C_X(w_1 v_1 r_0) = \langle r_1 \rangle \times \langle r_1 r_3 d_1, t_1 s_2, a_0 t_1, r_1 s_1 \rangle \cong Z_2 \times \text{Sym}_4 ;$$

$$C_X(u_4 v_1) = C_X(u_4 v_1 r_0) = \langle r_1 \rangle \times \langle r_3, s_2, a_0, s_1 \rangle \cong Z_2 \times \text{Sym}_4 ;$$

$$C_Y(v_1) = C_Y(v_1 r_0) = E_1 \cdot A_0 \cong E(2^4) \cdot L_3(2) ;$$

$$C_Y(w_1 v_1) = C_Y(w_1 v_1 r_0) = \langle r_0, r_1, r_2 d_1, d_2 t_1 \rangle \cdot \langle r_1 r_3 d_1, t_1 s_2, a_0 t_1, s_1 \rangle \\ \cong E(2^4) \cdot \text{Sym}_4 ;$$

$$C_X(v_1 r_0 s) = \langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2, q_0 t_1 s_1 \rangle \cong L_3(2) ;$$

$$C_X(u_1 v_1 r_0 s) = \langle r_1 r_3 d_1, t_1 s_2, a_0 t_1, r_1 s_1 \rangle \cong \text{Sym}_4 .$$

Die Aussagen über die Fusion in  $J$  folgen nun leicht aus Teil (a) und der Tatsache, daß  $(L \# V) = 155 u_1 + 868 w_1$  ist.

Q.E.D.



(3.8) Lemma. (a) Es sei  $X \in \{U, V\}$  und  $Y = N_J(X)$  sowie  $\bar{Y} = Y/X$ . Dann sind  $\bar{r}_0$  und  $\bar{r}_1\bar{r}_2$  Repräsentanten der beiden konjugierten Klassen von Involutionen in  $\bar{Y}$ . Ferner gilt  $C_X(r_0) \cong E(2^7)$  und  $C_X(r_1r_2) \cong E(2^6)$  sowie  $C_J(C_X(r)) = X \cdot \langle r \rangle$  für jede Involution  $r$  aus  $Y - X$ .

(b) Ist  $r$  eine Involution aus  $M - U$ , so gibt es eine Involution  $\bar{r}$  derart, daß  $\bar{r} \in Ur \cap \text{ccl}_J(u_1)$  ist und daß  $Ur \cap \text{ccl}_J(u_1) = \text{ccl}_U(\bar{r}) = [U, \bar{r}] \cdot \bar{r} = [U, r] \cdot \bar{r}$  gilt. Insbesondere ist  $Ur \cap \text{ccl}_J(u_1) = \text{ccl}_U(r) = [U, r] \cdot r$  für Involutionen  $r \in I$ .

(c) Es sei  $D = C_U(r_0) \times \langle r_0 \rangle$  und  $N = N_J(D)$ . Dann gilt  $D = U_0 \cdot \langle v_1, r_0 \rangle \cong C_V(r_0) \times \langle r_0 \rangle = C_J(D)$  und  $N = U \cdot E_1 E_2 \cdot A_0$  mit  $(N \# D) = 7u_1 + 23u_4 + 28w_1 + 8v_1r_0 + 56u_4v_1r_0 + 16r_0 + 112u_4r_0$ . Ferner findet in  $J$  die folgende Fusion statt:  $w_1 \sim v_1r_0 \sim u_4r_0$  und  $u_1 \sim u_4 \sim u_4v_1r_0 \sim r_0$ .

(d) Es sei  $D_1 = C_V(r_1r_2) \times \langle r_1r_2 \rangle$ ,  $D_2 = C_U(r_1r_2) \times \langle r_1r_2 \rangle$  und  $N_i = N_J(D_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$ ; dann gilt folgendes:

(1)  $D_1 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5v_1, v_2, r_1r_2 \rangle = C_J(D_1)$  und

$$N_1 = V \cdot R_1 R_2 \cdot \langle a_1 a_2, t_1 t_2 \rangle \quad \text{mit}$$

$$(N_1 \# D_1) = 1 u_1 + 6 u_2 + 8 u_5 v_1 + 12 u_3 + 12 w_1 + \\ 24 u_2 u_4 u_5 v_1 v_2 + 16 r_1 r_2 + 48 u_3 r_1 r_2 ;$$

in  $J$  gilt ferner  $w_1 \sim u_5 v_1 \sim u_2 u_4 u_5 v_1 v_2 \sim u_3 r_1 r_2$  und  $u_1 \sim u_2 \sim u_3 \sim r_1 r_2$ .

(2)  $D_2 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 v_1 r_0, v_2 r_2, r_1 r_2 \rangle = C_J(D_2)$  und  $N_2 = UR_1 \cdot C$  mit  $C \cong \text{Sym}_5$ ;  $Y_2 = UR_1 \cdot \langle d_2, s_2, t_1 t_2 \rangle$  ist eine Sylow 2-Untergruppe von  $N_2$  und es gilt

$$(Y_2 \# D_2) = 1 u_1 + 2 u_2 + 4 u_4 + 8 u_3 u_5 v_1 r_0 + 16 w_1 v_2 r_2 \\ + 4 u_3 + 4 w_1 + 8 u_4 u_5 v_1 r_0 + 8 v_2 r_2 + 8 u_2 v_2 r_2 \\ + 32 r_1 r_2 + 32 u_3 r_1 r_2 \quad \text{und}$$

$$(N_2 \# D_2) = 1 u_1 + 30 u_2 + 12 w_1 + 20 u_3 + \\ 32 r_1 r_2 + 32 u_3 r_1 r_2 .$$

Ferner liegt in  $J$  die folgende Fusion vor:

$$u_1 \sim u_2 \sim u_4 \sim u_3 u_5 v_1 r_0 \sim w_1 v_2 r_2 \sim u_3 \sim u_4 u_5 v_1 r_0 \sim u_2 v_2 r_2 \sim r_1 r_2$$

$$\text{und } w_1 \sim v_2 r_2 \sim u_3 r_1 r_2 .$$

$$\text{In } N_2 \text{ gilt } u_2 \sim u_4 \sim u_3 u_5 v_1 r_0 \sim w_1 v_2 r_2, \quad w_1 \sim v_2 r_2$$

$$\text{und } u_3 \sim u_4 u_5 v_1 r_0 \sim u_2 v_2 r_2 .$$

Beweis. (a) Bekanntlich hat sowohl  $L_5(2)$  als auch  $M_{24}$  genau zwei konjugierten Klassen von Involutionen. Aus (3.2) und (3.4) folgt sofort  $C_X(r_0) \cong E(2^7)$  und  $C_X(r_1 r_2) \cong E(2^6)$  und somit der erste Teil der Behauptung.

Aus [J] folgt nun, daß für  $r \in \{r_0, r_1 r_2\}$  die Gruppe  $C = C_J(C_X(r))$  eine 2-Gruppe ist; da nun  $Y \cap S \in \text{Syl}_2(Y)$  ist und außerdem  $Y \cap S$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_Y(r \bmod X)$  enthält und nach (3.7) ferner  $C \cap (Y \cap S) = X \cdot \langle r \rangle$  gilt, folgt schließlich  $C = X \cdot \langle r \rangle$ . Damit ist die Behauptung in (a) bewiesen.

(b) Nach Teil (a) können wir o.B.d.A. annehmen, daß es ein  $y \in \{r_0, r_1 r_2\}$  gibt mit  $U \cdot r = U \cdot y$ . Wir berechnen nun die folgende Konjugation:  $sq_1 s_2: r_1 r_2 \rightarrow u_1 u_5 v_1 r_0$  und  $sq_1 s_2: u_3 r_1 r_2 \rightarrow u_5 r_0$ ; nach (3.4) und (3.6) gilt dabei  $u_1 u_5 v_1 r_0 \in \text{ccl}_J(u_1)$  und  $(u_5 r_0)^S = u_1 v_1 \in \text{ccl}_J(w_1)$ . Ferner wissen wir, daß  $(r_0)^S = v_1 \in \text{ccl}_J(u_1)$  ist. Insbesondere ist also stets  $y \in \text{ccl}_J(u_1)$ .

Da  $[U, r_1 r_2] = \langle u_1, u_2, u_4, u_3 u_5 v_1 r_0, u_3 v_2 r_2 \rangle \cong E(2^5)$  und  $C_U(r_1 r_2) \cong E(2^6)$  ist, folgt die Behauptung nun offensichtlich im Falle  $y = r_1 r_2$ .

Die Involutionen aus  $U r_0$  sind genau die Elemente aus  $C_U(r_0) \cdot r_0 = U_0 \langle v_1 r_0 \rangle \cdot r_0 = U_0 \cdot v_1 \cup U_0 \cdot r_0$ . Nach (3.7) gilt  $U_0 \cdot v_1 \cap \text{ccl}_J(u_1) = \text{ccl}_T(v_1) = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \cdot v_1$ . Außerdem ist  $[U_0, s] = \langle 1 \rangle$  und  $(r_0)^S = v_1$ ; damit folgt nun offensichtlich  $U_0 \cdot r_0 \cap \text{ccl}_J(u_1) = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \cdot r_0$ . Insgesamt erhalten wir also  $U \cdot r_0 \cap \text{ccl}_J(u_1) = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 r_0 \rangle \cdot r_0 = [U, r_0] \cdot r_0$ . Somit gilt die Behauptung auch im Falle  $y = r_0$ .

Da  $T \in \text{Syl}_2(L_0)$  mit  $L_0 \cong \text{GL}_5(2)$  ist, sind alle Involutionen aus  $T$  in  $L_0$  zu  $r_0$  oder zu  $r_1 r_2$  konjugiert; da  $\{r_0, r_1 r_2\} \subseteq \text{ccl}_J(u_1)$  ist, folgt die Behauptung in (b).

(c) Mit (3.4) und Teil (a) folgt sofort, daß

$$D = U_0 \langle v_1, r_0 \rangle = C_U(r_0) \times \langle r_0 \rangle = C_J(D) \text{ ist.}$$

Wir setzen nun  $N_0 = N \cap M$ ; offensichtlich ist dann  $N_0 = C_M(r_0 \bmod U) = U \cdot E_1 E_2 \cdot A_0$ . Ferner berechnen wir nun leicht mit Hilfe der Aussage in (3.7) und (3.2), daß  $(N_0 \# D) = 7u_1 + 28u_4 + 28w_1 + 8v_1 r_0 + 56u_4 v_1 r_0 + 16r_0 + 112u_4 r_0$  ist. Mit (b) und den Aussagen in (3.6) folgt nun außerdem, daß  $u_1 \sim u_4 \sim u_4 v_1 r_0 \sim r_0$  und  $w_1 \sim v_1 r_0 \sim u_4 r_0$  in  $J$  gilt.

Da  $H_1 \leq M$  ist, folgt  $N \cap H_1 = N_0 \cap H_1$  und somit auch  $|N : (N \cap H_1)| = |N : N_0| \cdot 28 \in \{28, 36, 140, 148\}$ ; also gilt  $|N : N_0| \in \{1, 5\}$ . Wäre  $|N : N_0| = 5$ , so wäre dann auch  $\text{ccl}_N(v_1 r_0) = \text{ccl}_{N_0}(v_1 r_0)$  und damit  $C_N(v_1 r_0) > C_{N_0}(v_1 r_0)$ ; da aber  $C_J(v_1 r_0) \leq M$  ist, folgt  $C_N(v_1 r_0) \leq M \cap N = N_0$ . Dieser Widerspruch liefert schließlich  $N = N_0$ .

(d) Aus (3.2), (3.4) und Teil (a) folgt sofort, daß  
 $D_1 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 v_1, v_2, r_1 r_2 \rangle = C_J(D_1)$  und auch  
 $D_2 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 v_1 r_0, v_2 r_2, r_1 r_2 \rangle = C_J(D_2)$  ist.

Wir setzen nun  $X_1 = N_1 \wedge L$  und  $X_2 = N_2 \wedge M$ ; offensichtlich ist  $X_1 = C_L(r_1 r_2 \bmod V) = V \cdot R_1 R_2 \cdot \langle a_1 a_2, t_1 t_2 \rangle$  und  
 $X_2 = C_M(r_1 r_2 \bmod U) = U \cdot R_1 \cdot C$  mit  $C \cong \text{Sym}_5$ . Außerdem ist  
 $Y_2 := UR_1 \cdot \langle d_2, s_2, t_1 t_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $X_2$ .

Wir bestimmen nun zunächst  $N_1$ . In [L] wurde gezeigt, daß  
 $(X_1 \# C_V(r_1 r_2)) = 1u_1 + 6u_2 + 8u_5 v_1 + 12u_3 + 12w_1 + 24u_2 u_4 u_5 v_1 v_2$  ist.  
 Da  $[V, r_1 r_2] = \langle u_1, u_2, u_4, u_5 v_1 \rangle$  und  $w_1 = u_3 u_4$  sowie  
 $r_0 a_1 a_2: v_2 r_1 r_2 \rightarrow u_3 r_1 r_2$  ist, erhalten wir schließlich  
 $(X_1 \# D_1) = 1u_1 + 6u_2 + 8u_5 v_1 + 12u_3 + 12w_1 +$   
 $24u_2 u_4 u_5 v_1 v_2 + 16r_1 r_2 + 48u_3 r_1 r_2$ .

Dabei gilt nach [L] und (b) auch  $u_1 \sim u_2 \sim u_3 \sim r_1 r_2$  und  
 $w_1 \sim u_5 v_1 \sim u_2 u_4 u_5 v_1 v_2 \sim u_3 r_1 r_2$  in  $J$ .

Da  $V$  die einzige elementar-abelsche Untergruppe der  
 Ordnung  $2^{10}$  in  $X_1$  ist, gilt  $\text{Syl}_2(X_1) \leq \text{Syl}_2(N_1)$ ; ferner  
 kontrolliert  $X_1$  die  $N_1$ -Fusion in  $D_1 \wedge V$ . Da 17 kein  
 Teiler von  $|J|$  ist, folgt  $N_1 \leq H$ . Da  $N_1 \wedge O_{2,3}(H) = E$   
 und  $H/E \cong \text{Aut}(M_{22})$  ist, folgt  $\text{Syl}_3(X_1) \leq \text{Syl}_3(N_1)$ .  
 Da  $|H/E| = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$  und 11 kein Teiler von  $|GL_7(2)|$   
 ist, muß  $|N_1 : X_1|$  dann 35 teilen.

Wir beachten, daß unter  $N_1$  sowohl  $\text{ccl}_{X_1}(r_1 r_2)$  als  
 auch  $\text{ccl}_{X_1}(u_3 r_1 r_2)$  mit höchstens einer  $X_1$ -Bahn aus  $D_1 \wedge V$   
 fusionieren kann; da nach [J] Elemente der Ordnung 7  
 fixpunktfrei auf  $E - Z(E)$  operieren, sieht man nun leicht,  
 daß  $N_1 = X_1$  ist.

Um die weiteren Aussagen in (2) zu beweisen, vermerken wir zunächst, daß  $U_C := [U, r_1 r_2] = \langle u_1, u_2, u_4, u_3 u_5 v_1 r_0, u_3 v_2 r_2 \rangle$  ist. Wir berechnen nun die folgenden Zentralisatoren:

$$C_{Y_2}(u_3 u_5 v_1 r_0) = U \langle r_0, r_1 r_2, r_1 r_3, r_1 d_1, s_1, d_2 t_1 t_2 \rangle,$$

$$C_{Y_2}(u_4 u_5 v_1 r_0) = U \langle r_0, r_1 r_2, r_3, d_1, s_1, t_1 t_2 \rangle,$$

$$C_{Y_2}(u_2 v_2 r_2) = U \langle r_1, r_2, r_3, d_1, r_0 s_1, s_2 \rangle \text{ und}$$

$$C_{Y_2}(w_1 v_2 r_2) = U \langle r_1, r_2, r_0 r_3, r_0 d_1, s_1 \rangle.$$

Weitere Zentralisatoren können wir direkt (3.6) entnehmen und damit dann leicht bestätigen, daß  $Y_2$  wie in (2) angegeben auf  $D_2$  operiert. Da  $a_1: u_2 v_2 r_2 \rightarrow u_2 u_4 v_1 r_0$ ,  $u_3 v_2 r_2 \rightarrow w_1 u_5 v_1 r_0$  gilt mit  $u_2 u_4 v_1 r_0 \in \text{ccl}_T(w_1 v_1 r_0)$  und  $w_1 u_5 v_1 r_0 \in \text{ccl}_T(u_5 v_1 r_0)$  können wir mit Hilfe der Aussagen in (3.6) und (b) nun auch die in (2) angegebene Fusion der Involutionen in  $J$  verifizieren.

Ist  $f \in C$  mit  $o(f) = 5$ , so gilt dann offensichtlich  $\langle u_1 \rangle < C_U(r_1 r_2, f) < C_{D_2}(f) \cong E(2^3)$ . Da  $U_C \leq X_2$  ist, erhalten wir dann  $v_2 r_2 \in \text{ccl}_{X_2}(w_1)$  und  $\{u_4 u_5 v_1 r_0, u_2 v_2 r_2\} \subseteq \text{ccl}_{X_2}(u_3)$ . Außerdem gilt entweder  $(X_2 \# U_C) = 1 u_1 + 10 u_2 + 20 u_4$  oder  $(X_2 \# U_C) = 1 u_1 + 30 u_2$ .

Wir beachten, daß  $X_2 < C_M(u_1) = UR_1 \cdot C_0$  mit  $C_0 \cong \hat{3}\text{Sym}_6$  und  $D_3(C_0) = \langle a_1 \rangle$  ist. Somit normalisiert  $a_1$  auch  $X_2$ . Da  $\langle r_1 r_2, r_0 r_1 r_3, a_1 \rangle \cong \text{Alt}_4$  und  $C_U(r_1 r_2, r_0 r_1 r_3) = U_C$  ist, normalisiert  $a_1$  auch  $U_C$ . Da  $a_1$  fixpunktfrei auf  $U_C = \langle u_1 \rangle$  operiert, folgt  $(X_2 \# U_C) = 1 u_1 + 30 u_2$ . Insgesamt haben wir also gezeigt, daß  $X_2$  wie folgt auf  $D_2$  operiert:  $(X_2 \# D_2) = 1 u_1 + 30 u_2 + 12 w_1 + 20 u_3 + 32 r_1 r_2 + 32 u_3 r_1 r_2$ .

Da  $X_2$  die  $N_2$ -Fusion in  $D_2 \cap U$  kontrolliert, folgt dann  $\text{ccl}_{N_2}(w_1) = \text{ccl}_{X_2}(w_1)$ . Wegen  $H_1 \leq M$  folgt schließlich  $N_2 = X_2$ .

Q.E.D.

(3.9) Bezeichnungen. Wir wollen weitere Bezeichnungen für Elemente und Untergruppen von  $J$  festlegen. Es sei

$$f_2 := a_2' w_2 s \quad ,$$

$$a_6 := (f_2)^3 \cdot a_2 \cdot (f_2)^2 \quad ,$$

$$K_0 := \langle v_4 t_2, w_2 s, a_2, t_2 \rangle \quad \text{und}$$

$$L_3 := \langle u_4 u_5 r_2 r_3 d_1, u_3 u_5 r_0 r_1 r_2 r_3 s_1, u_6 d_2 s_2 t_1, q_2, a_1 \rangle .$$

(3.10) Lemma. Es sei daran erinnert, daß  $K = N_J(R)$  ist mit  $K/R \cong \text{Sym}_5 \times L_3(2)$  und daß  $K$  Sylow  $p$ -Normalisatoren von  $J$  für  $p \in \{5, 7\}$  enthält. Außerdem gilt folgendes:

(a) Es ist  $(K_0)' = \langle v_4 t_2, w_2 s, a_2 \rangle \cong \text{Alt}_5$  und  $K_0 = (K_0)' \cdot \langle t_2 \rangle \cong \text{Sym}_5$  sowie  $K_0 \cap M = \langle v_4 t_2, w_2 s, a_6, t_2 \rangle \cong \text{Sym}_4$ , wobei  $t_2$  invertierend auf  $\langle a_6 \rangle \cong Z_3$  operiert.

Ist  $x \in \{(a_2)^i \cdot f_2 \cdot (v_4 t_2)^j \mid 0 \leq i, j \leq 1\}$ , so ist  $\sigma(x) = 5$ .

(b) Es ist  $C_{UR_2}(a_6) = C_U(a_6) = C_R(a_6) = Z(R) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$ . Ferner operiert  $a_6$  wie folgt auf der Gruppe  $UR_2$ :

$$\begin{aligned} a_6: \quad & u_3 \rightarrow u_2 u_4 v_1 r_0, \quad u_5 \rightarrow u_1 u_2 u_4 v_2 r_2, \quad u_6 \rightarrow u_1 v_3 d_2, \quad v_1 r_0 \rightarrow u_1 u_3 v_1 r_0, \\ & v_2 r_2 \rightarrow u_4 u_5 v_2 r_2, \quad v_3 d_2 \rightarrow u_6 v_3 d_2, \quad v_4 t_2 \rightarrow v_4 t_2 w_2 s + w_2 s, \\ & r_0 \rightarrow r_1 \rightarrow r_0 r_1, \quad r_2 \rightarrow r_3 \rightarrow r_2 r_3, \quad d_2 \rightarrow s_2 \rightarrow d_2 s_2. \end{aligned}$$

(c) Es ist  $K = R \backslash (K_0 \times L_2) = \langle K_0, L_3 \rangle = N_J(Z(R))$  und  $C_J(Z(R)) = R \cdot K_0$ .

(d)  $Q := \langle q_2 \rangle$  ist eine Sylow 7-Untergruppe von  $J$  mit  $N_J(Q) = (Q \cdot \langle a_1 \rangle) \times K_0 \cong F_{21} \times \text{Sym}_5$ .

(e)  $F := \langle f_2 \rangle$  ist eine Sylow 5-Untergruppe von  $J$  mit  $C_J(F) = F \times L_3$ , wobei  $O_2(L_3) = Z(R)$ ,  $L_3/Z(R) \cong L_3(2)$  ist und  $L_3$  nicht über  $Z(R)$  zerfällt. Ferner ist  $v_4 t_2 w_2 s$  eine Involution, welche invertierend auf  $F$  und trivial auf  $L_3$  operiert.

Beweis. Wir beachten zunächst, daß  $R = (V \cap R) \cdot R_2$  ist mit  $V \cap R = [V, R_2] = V^*$ . Da  $R \not\leq S$  und  $N_{L_0}(R_2) = R_2 \cdot L_2 \cdot \langle a_2, t_2 \rangle$  ist, folgt  $\langle K_0, L_2 \rangle \leq K$ . Wir wissen ferner, daß  $Q := \langle q_2 \rangle$  eine Sylow 7-Untergruppe von  $J$  ist mit  $Q \leq L_2$  sowie  $Q \cdot \langle a_1 \rangle \cong F_{21}$  und  $N_J(Q) = N_K(Q) = F_{21} \times \text{Sym}_5$ . Aus den Relationen in (3.2) und (3.3) folgt mit leichter Rechnung, daß  $[Q, K_0] = \langle 1 \rangle$  und  $[Z(R), K_0] = \langle 1 \rangle$  ist. Also ist  $K_0$  isomorph zu einer Untergruppe von  $\text{Sym}_5$ .

Da  $X := \langle v_4 t_2, w_2 s, t_2 \rangle \cong D_8$  und  $\langle a_2, t_2, v_4 \rangle \cong \text{Sym}_3 \times Z_2$  ist, folgt dann  $K_0 \cong \text{Sym}_5$ . Da ferner  $X' = \langle v_4 t_2 \rangle$  und  $v_4 t_2 \in \text{ccl}_J(w_1)$  sowie  $\{v_4, t_2\} \subseteq \text{ccl}_J(u_1)$  und  $\langle a_2, v_4 t_2 \rangle$  isomorph zu  $\text{Sym}_3$  ist, folgt  $(K_0)' = \langle v_4 t_2, w_2 s, a_2 \rangle \cong \text{Alt}_5$ .

Wir bezeichnen mit  $\theta$  einen Isomorphismus von  $K_0$  auf die symmetrische Gruppe vom Grade 5 auf der Ziffernmenge  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , wobei o.B.d.A.  $\theta(a_2) = (123)$ ,  $\theta(v_4) = (45)$  und  $\theta(t_2) = (23)$  ist. Dann gilt  $\theta(v_4 t_2) = (23)(45)$  und somit ist wegen  $Y := \langle v_4 t_2, w_2 s \rangle \in \text{Syl}_2((K_0)')$  dann  $\theta(w_2 s) \in \{(24)(35), (25)(34)\}$ . Nun berechnen wir für  $f_2$  sofort, daß  $\theta(f_2) \in \{(14253), (15243)\}$  ist; damit folgt  $\theta(a_6) \in \{(234), (235)\}$ . Also ist  $N_{K_0}(Y) = Y \langle a_6, t_2 \rangle \cong \text{Sym}_4$ . Die Tatsache, daß  $t_2$  invertierend auf  $\langle a_6 \rangle$  operiert und daß  $a_6: v_4 t_2 \rightarrow v_4 t_2 w_2 s \rightarrow w_2 s$  gilt, folgt aus der entsprechenden Operation der Bilder unter dem Isomorphismus  $\theta$ . Ebenso leiten wir die Aussagen über die Elemente der Form  $(a_2)^i \cdot f_2 \cdot (v_4 t_2)^j$  mit  $i, j \in \{0, 1\}$  her.

Mit Hilfe der Relationen in (3.2), (3.3) und (3.4) bestätigen wir nun leicht die Aussagen in (b).

Wir haben damit dann die Aussagen in den Teilen (a), (b) und (d) bewiesen.

Mit Hilfe der Relationen in (3.2) - (3.4) berechnen wir nun  $[ \langle f_2, v_4 t_2 w_2 s \rangle, L_3 ] = \langle 1 \rangle$ . Da  $F := \langle f_2 \rangle \in \text{Syl}_5(J)$  und  $N_J(F) \cong Z_5 \times E(2^3) \setminus L_3(2)$  ist, folgt zunächst, daß  $L_3$  isomorph zu einer Untergruppe von  $E(2^3) \setminus L_3(2)$  ist. Eine leichte Rechnung liefert  $[u_4 u_5 r_2 r_3 d_1, u_6 d_2 s_2 t_1] = u_1 u_2$  und damit schließlich  $O_2(L_3) = Z(R)$  und  $L_3 \cong E(2^3) \setminus L_3(2)$ .

Wiederum mit Hilfe der Relationen in (3.2) - (3.4) berechnet man nun für  $x = u_4 u_5 r_2 r_3 d_1$ , daß  $[t_2, x] = r_2$ ,  $[v_4, x] = u_4 u_5 v_2$  und  $[v_4 t_2, x] = v_2 r_2$  ist; daraus folgt dann  $[K_0, L_3] = R$  und auch  $\langle K_0, L_3 \rangle = K$ .

Alle weiteren Behauptungen sind nun trivial oder folgen aus Resultaten von [J].

Q.E.D.

In den folgenden Lemmata stellen wir Informationen über Zentralisatoren von Involutionen und Elementen der Ordnung vier in  $J$  zusammen; im wesentlichen sind diese Resultate bereits in [J] und [L] enthalten. Da insbesondere die Isomorphietypen von gewissen Zentralisatoren im nächsten Lemma bereits in [J] und [L] bestimmt werden und man mit trivialen Rechnungen aus den Relationen (3.2) und (3.3) herleiten kann, welche Elemente in den zur Diskussion stehenden Zentralisatoren jeweils enthalten sind, geben wir dazu keinen detaillierten Beweis an.



(3.11) Lemma. Wir setzen  $F_0 = \langle u_1, u_6, v_3, d_2, s_2 \rangle$  und  $F_1 = \langle u_1, u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, s \rangle$  sowie  $S_0 = \langle F_0, F_1, t_2 \rangle$ . Dann gilt folgendes:

(a) Es ist  $(H_0)' = C_3(a_1) = \langle a_1, S_0, L_1 \rangle \cong \hat{M}_{22}$  mit  $Z((H_0)') = \langle a_1, u_1 \rangle \cong Z_6$ ,  $H' = E * (H_0)'$  und  $H_0 = (H_0)' \cdot \langle t_1 \rangle$ .

Ferner ist  $S_0$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $(H_0)'$  mit  $Z(S_0) = \langle u_1, u_6 \rangle$ ,  $(S_0)' = \langle u_1, u_6, v_3, d_2, v_4 t_2 \rangle$  und  $(S_0)'' = \langle u_6 \rangle$ ;  $F_0$  und  $F_1$  sind die einzigen elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung  $2^5$  in  $S_0$ .

Das Element  $u_1$  hat keine Quadratwurzel in  $H_0$  und das Element  $a_1$  operiert fixpunktfrei auf  $E - Z(E)$ .

(b)  $(H \# E) = 1 u_1 + 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 u_2 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 w_1 + 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 v_2 r_0$ ; dabei ist  $(v_2 r_0)^2 = u_1$  und die Elemente  $u_1, u_2$  und  $w_1$  sind Involutionen.

Es ist  $C_{H_0}(u_2) = (F_0 \cdot K_0) \cdot \langle t_1 \rangle = (F_0 \cdot \langle t_1 \rangle) \cdot K_0 \cong E(2^6) \cdot \text{Sym}_5$  und  $C_H(u_2) = C_E(u_2) * C_{H_0}(u_2) = (R \cdot \langle d_1, t_1 \rangle) \cdot K_0$ .

Ferner ist  $C_{H_0}(w_1) = F_1 \cdot K_1 \cong E(2^5) \cdot \text{Sym}_5$  mit  $K_1 \cong \text{Sym}_5$  und  $\text{Sym}_4 \cong \langle d_2, t_2, a_1 a_3, t_1 s_2 \rangle \leq F_1 \cdot K_1$  sowie

$C_H(w_1) = C_E(w_1) * C_{H_0}(w_1) = (U \cdot \langle r_0, r_1, r_2, r_3 d_1, s_1 \rangle) \cdot K_1 \cong E(2^{11}) \cdot E(2^5) \cdot \text{Sym}_5$ .

Es gilt außerdem  $C_E(v_2 r_0) \cong \text{Ex}(2^{11}) * Z_4$  und

$\text{PGL}_2(11) \cong C_H(v_2 r_0) / C_E(v_2 r_0) \triangleright C_{H_1}(v_2 r_0) / C_E(v_2 r_0) \cong L_2(11)$ .

(c) In  $H' - E$  gibt es genau vier H-Konjugiertenklassen von Involutionen; Repräsentanten dieser Klassen sind die Elemente  $u_6$ ,  $w_2 = u_1 u_6$ ,  $u_6 r_0$  und  $u_6 v_1 r_0$ .

Für  $x \in \{u_6, w_2\}$  ist  $C_E(x) = \langle u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle \times (\langle v_1, r_2 \rangle * \langle v_2, r_0 \rangle)$   
isomorph zu  $E(2^4) \times (D_8 * D_8)$ ; außerdem ist  
 $C_H(x) = C_E(x) * C_{H_0}(x) = U \cdot E_2 \cdot (\langle a_1, t_1 \rangle \times \langle a_3, s_2 \rangle)$ .

Es ist  $C_E(u_6 r_0) = \langle u_2, u_3, u_4, u_5, r_0 \rangle \times \langle v_1, r_2 \rangle$   
isomorph zu  $E(2^5) \times D_8$  und außerdem  
 $C_H(u_6 r_0) = W \cdot (\langle v_1, t_1 \rangle \times \langle v_1 v_3 r_1, v_1 v_4 d_1, a_3, s_2 \rangle)$ .

Ferner ist  $C_E(u_6 v_1 r_0) = \langle u_2, u_3, u_4, u_5, v_1 r_0 \rangle \times \langle v_2 r_2, r_0 \rangle$   
isomorph zu  $E(2^5) \times D_8$  und außerdem  
 $C_H(u_6 v_1 r_0) = U \cdot (\langle r_0, t_1 \rangle \times \langle r_0 r_1 d_2, r_0 d_1 t_2, a_3, s_2 \rangle)$ .

(d) In  $H - H'$  gibt es genau drei H-Konjugiertenklassen  
von Involutionen; Repräsentanten dieser Klassen sind die  
Elemente  $t_1$ ,  $u_1 t_1$  und  $t = u_6 d_2 s_2 t_1$ .

Für  $x \in \{t_1, u_1 t_1\}$  gilt  $C_E(x) = \langle u_1, u_2, u_3, v_1, r_0, r_1, d_1 \rangle$   
und  $C_{H'}(x) = C_E(x) \cdot \langle u_6, v_3, v_4 \rangle \cdot L_1 \cong E(2^7) \cdot \text{Hol}(E(2^3))$ .

Ferner ist  $C_E(t) = \langle u_1, u_2, w_1, u_3 v_1 r_0, r_0, u_3 r_1 \rangle \cong E(2^6)$   
und  $C_{H'}(t) = (C_E(t) * F_0) \cdot \langle f_2, z \rangle$ , wobei  $\langle f_2, z \rangle$  eine  
Frobeniusgruppe der Ordnung 20 ist und außerdem  
 $z = u_5 r_2 r_3 d_1 \cdot a_2^2 w_2 s a_2^2 t_2$  und  $z^2 = u_2 v_4 t_2 a_2^2$  ist.

(e) In  $J$  liegt die folgende Fusion vor:

$u_1 \sim u_2 \sim u_6 \sim u_6 v_1 r_0 \sim t_1$  und  
 $w_1 \sim u_1 u_6 \sim u_6 r_0 \sim u_1 t_1 \sim u_6 d_2 s_2 t_1$ .

(3.12) Lemma. Es sei daran erinnert, daß  $H_1 = C_J(w_1) = U \cdot M_1$  ist mit  $M_1 \cong \text{Aut}(M_{22})$  und daß  $S_2 = UE_2 \cdot \langle r_1, r_3 d_1, s_1, t_1 s_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $H_1$  ist mit  $Z(S_2) = \langle u_1, w_1 \rangle$ .

Wir setzen nun  $x_1 = d_1 t_1 s_2 a_3^2 q_2 q_0$  und  $y_1 = r_3 a_0 = a_0 s_2$ ; dann haben  $x_1$  und  $y_1$  beide die Ordnung drei und außerdem ist  $\langle x_1, r_1 \rangle \cong \langle y_1, s_1 \rangle \cong \text{Sym}_3$ . Ferner gilt folgendes:

(a) Es ist  $(H_1)' = U \cdot (M_1)' \cong E(2^{11}) \cdot M_{22}$  und  $H_1 = (H_1)' \cdot \langle r_1 \rangle$  sowie  $S_2 \cap (H_1)' = UE_2 \cdot \langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2 \rangle$ ; sowohl  $H_1$  als auch  $(H_1)'$  operieren unzerlegbar auf  $U$  und irreduzibel auf  $U/\langle w_1 \rangle$ .

(b) Es ist  $(H_1 \# U) = 1 w_1 + 231 u_1 + 231 u_1 w_1 + 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 u_3 + 44 w_2$ , wobei  $C_{H_1}(u_1) = C_{H_1}(u_1 w_1) = H_1 \cap H = U \cdot \langle r_0, r_1, r_2, r_3 d_1, s_1 \rangle \cdot K_1$  ist mit  $K_1 \cong \text{Sym}_5$  und  $\langle d_2, s_2, a_1 a_3, t_1 s_2 \rangle < H_1 \cap H$ ; ferner ist  $C_{H_1}(u_3) = U \cdot E_2 \cdot (\langle x_1, r_1 \rangle \times \langle y_1, s_1 \rangle)$ .

Es ist  $E(2^{11}) \cdot L_3(4) \cong C_{H_1}(w_2) > U \cdot E_2 \cdot K_2 \cong E(2^{11}) \cdot E(2^4) \cdot \text{Alt}_5$  mit  $K_2 = \langle s_2 t_1, j_2 t_1, a_1 a_3, f_0 \rangle \cong \text{Alt}_5$ . Außerdem sind die Elemente  $w_2, w_3$  und  $s$  in  $H_1$  konjugiert.

(c) In  $(H_1)' - U$  gibt es genau drei  $H_1$ -Konjugiertenklassen von Involutionen; Repräsentanten dieser Klassen sind die Elemente  $r_0, w_1 r_0$  und  $w_2 r_0$ .

Es ist  $C_{H_1}(r_0) = C_{H_1}(w_1 r_0) = W \cdot (\langle v_1 r_0, r_1 \rangle \times X_1)$ , wobei  $X_1 = \langle r_1 r_3 d_1, t_1 s_2, y_1, r_1 s_1 \rangle \cong \text{Sym}_4$  ist mit  $j_2 t_1 \in X_1$ . Ferner gilt  $C_{H_1}(w_2 r_0) = W \cdot X_2 \cong E(2^{10}) \cdot E(2^4)$ , wobei  $X_2 = \langle v_1 r_0, s_2 t_1, j_2 t_1, v_3 d_2 r_1 \rangle \cong E(2^4)$  ist.

(d) In  $H_1 - (H_1)'$  gibt es genau vier  $H_1$ -Konjugiertenklassen von Involutionen; Repräsentanten dieser Klassen sind die Elemente  $r_1, u_3 r_1, r_1 r_2$  und  $w_1 r_1 r_2$ .

Es sei  $C_1 := C_{(H_1)}, (r_1 r_2) = C_{(H_1)}, (w_1 r_1 r_2)$ ; dann gilt  
 $C_{H_1}(r_1 r_2) = C_{H_1}(w_1 r_1 r_2)' = C_1 \times \langle r_1 r_2 \rangle$  mit  $C_1 \approx E(2^6) \cdot E(2^4) \cdot F_{20}$   
 sowie  $O_2(C_1) = C_U(r_1 r_2) \cdot \langle r_0, r_2, r_1 r_3 d_1, r_1 s_1 \rangle$  und  
 $O_2(C_1) \cdot \langle t_1 t_2 s_2 \rangle \in \text{Syl}_2(C_1)$ .

Es sei  $C_2 := C_{(H_1)}, (u_3 r_1)$  und  $C_3 := C_{(H_1)}, (r_1)$  sowie  
 $Q_1 := C_U(r_1) \cdot \langle r_0, r_1 r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$  und  $Q_2 := C_U(r_1) \cdot \langle r_0, r_1 r_2 r_3 d_1, t_1 d_2 s_2 \rangle$ .  
 Dann gilt  $C_2 = C_U(r_1) \langle r_0, r_2, d_2, u_5 r_1 r_3 d_1, u_6 t_1 s_2, y_1, r_1 s_1 \rangle$   
 mit  $C_U(r_1) \approx E(2^7)$  und  $C_2/C_U(r_1) \approx \text{Ex}(2^5) \cdot \text{Sym}_3$ .  
 Außerdem ist  $C_3 = C_U(r_1) \cdot X_3$  mit  $X_3 \approx \text{Hol}(E(2^3))$  und  
 $Q := O_2(C_3) \in \{Q_1, Q_2\}$  sowie  $Q \cdot \langle r_2, d_2, y_1, r_1 s_1 \rangle \leq C_3$ ;  
 ferner gilt  $Z(Q) = Q' \times \langle w_1 \rangle \approx E(2^4)$ , wobei  $Q'$  ein  
 Element aus  $\{\langle u_1, u_2, v_1 r_0 \rangle, \langle u_1, u_2, u_4 v_1 r_0 \rangle\}$  ist.

(e) In  $J$  findet die folgende Fusion statt:

$$u_1 \sim u_3 \sim r_0 \sim r_1 \sim r_1 r_2 \quad \text{und}$$

$$w_1 \sim u_1 w_1 \sim w_2 \sim w_1 r_0 \sim w_2 r_0 \sim u_3 r_1 \sim w_1 r_1 r_2.$$

Beweis. (a) Da  $\langle w_1 \rangle \leq U^* = (UE_2)' \leq (H_1)'$  ist und  
 $M_{22}$  nicht in  $\text{GL}_9(2)$  involviert ist, folgt  $U \leq (H_1)'$  und  
 damit auch  $(H_1)' = U \cdot (M_1)' \approx E(2^{11}) \cdot M_{22}$ . Insbesondere ope-  
 rieren dann sowohl  $M_1$  als auch  $(M_1)'$  unzerlegbar auf  $U$   
 und irreduzibel auf  $U/\langle w_1 \rangle$ . Mit  $U \cdot E_2 \cdot B \leq H_1$  und  
 $(H_1)' \wedge UE_2 B = U \cdot E_2 \cdot B'$  folgen nun die weiteren Aussagen in (a).

(b) Aus [L] entnehmen wir direkt Repräsentanten und  
 Längen der von  $H_1$  auf  $U$  induzierten Bahnen. Mit (3.11)  
 erhalten wir dann die Aussagen über  $C_{H_1}(u_1) = C_{H_1}(u_1 w_1)$ .  
 Die Behauptungen über  $C_{H_1}(u_3)$  bestätigt man mit Hilfe der  
 Relationen in (3.2) und (3.3) durch einfache Rechnungen.

Wir berechnen nun zunächst, daß  $C_{L_0}(w_1, w_2) = E_2 \cdot K_2$  isomorph zu  $E(2^4) \cdot \text{Alt}_5$  ist und daß  $N_{L_0}(K_2) = N_{A_2}(K_2) = (K_2 \times \langle j_0 r_3 d_1 \rangle) \cdot \langle j_0 \rangle \approx (\text{Alt}_5 \times Z_3) \cdot Z_2$  ist. Dann ist offensichtlich  $C_{H_1}(w_2) = C_{(H_1)'}(w_2)$ ; da Untergruppen der Ordnung  $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$  von  $M_{22}$  isomorph zu  $L_3(4)$  sind und da  $UE_2 K_2$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_{H_1}(w_2)$  enthält und diese bereits über  $U$  zerfällt, folgt  $C_{H_1}(w_2) \approx E(2^{11}) \cdot L_3(4)$ .

Da  $\langle w_1 \rangle \{w_2, w_3, s\} \subseteq \text{ccl}_J(w_1)$  ist, sind die Elemente  $w_2, w_3$  und  $s$  offensichtlich in  $H_1$  konjugiert.

(c) Offensichtlich ist  $Ur_0$  ein Repräsentant der einzigen Klasse von Involutionen in  $(H_1)'/U$ ; also hat jede  $H_1$ -Klasse von Involutionen aus  $(H_1)' - U$  einen Repräsentanten in  $C_U(r_0) \cdot r_0$ .

Wir berechnen zunächst, daß  $X := C_{H_1}(r_0 \bmod U) = UE_2 \cdot (X_1 \times \langle r_1 \rangle)$  ist mit  $X_1 = \langle r_1 r_3 d_1, t_1 s_2, y_1, r_1 s_1 \rangle \approx \text{Sym}_4$  sowie  $j_2 t_1 = t_1 s_2 y_1 r_1 s_1 \in X_1$ .

Da  $C_U(r_0) = [U, r_0] \cdot \langle w_1, w_2, u_5 \rangle$  ist, finden wir geeignete Repräsentanten bereits in  $\langle w_1, w_2, u_5 \rangle \cdot r_0$ . Es ist  $r_0 \in \text{ccl}_J(u_1)$  und  $\{w_1 r_0, w_2 r_0, w_1 w_2 r_0\} \subseteq \text{ccl}_J(w_1)$ ; somit sind  $r_0, w_1 r_0$  und  $w_2 r_0$  Repräsentanten von drei verschiedenen  $H_1$ -Klassen.

Wir berechnen nun  $C_X(r_0) = C_X(w_1 r_0) = W \cdot (\langle v_1 r_0, r_1 \rangle \times X_1)$  und  $C_X(w_2 r_0) = W \cdot X_2$  mit  $X_2 = \langle v_1 r_0, s_2 t_1, j_2 t_1, v_3 d_2 r_1 \rangle \approx E(2^4)$ . Somit gilt  $|\text{ccl}_X(r_0)| + |\text{ccl}_X(w_1 r_0)| + |\text{ccl}_X(w_2 r_0)| = 2^7$  und (c) ist damit bewiesen.

(d) Bekanntlich gibt es in  $\text{Aut}(M_{22}) = M_{22}$  genau zwei konjugierten Klassen von Involutionen. Da  $\{r_1, r_1 r_2\} \subseteq H_1 - (H_1)'$  und  $C_U(r_1) \approx E(2^7)$  sowie  $C_U(r_1 r_2) \approx E(2^6)$  ist, hat dann

jede  $H_1$ -Klasse von Involutionen in  $H_1 = (H_1)'$  einen Repräsentanten in  $Ur_1$  oder in  $Ur_1r_2$ . Da  $C_M(r_1 \bmod U)/U$  isomorph zu  $Ex(2^7) \cdot L_3(2)$  und  $C_M(r_1r_2 \bmod U)/U$  isomorph zu  $E(2^6) \cdot \text{Sym}_5$  ist, folgt  $X := C_{(H_1)}(r_1 \bmod U) = U \cdot X_3$  mit  $X_3 \cong \text{Hol}(E(2^3))$  und und  $Y := C_{(H_1)}(r_1r_2 \bmod U) = U \cdot X_4$  mit  $X_4 \cong E(2^4) \cdot F_{20}$ . Wir beachten dabei, daß  $U \cdot \langle r_0, r_2, d_2, r_1r_3d_1, r_1s_1, t_1s_2 \rangle$  bzw.  $U \cdot \langle r_0, r_2, r_1r_3d_1, r_1s_1, t_1t_2s_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $X$  bzw. von  $Y$  ist.

Da  $C_U(r_1r_2) = [U, r_1r_2] \cdot \langle w_1 \rangle$  ist und  $w_1r_1r_2 \in \text{ccl}_j(w_1)$  sowie  $r_1r_2 \in \text{ccl}_j(u_1)$  ist, sind dann  $r_1r_2$  und  $w_1r_1r_2$  Repräsentanten zweier verschiedener  $H_1$ -Klassen. Da aus jeder dieser beiden Klassen genau 32 Elemente in  $Ur_1r_2$  liegen, gilt dann o.B.d.A.  $C_Y(r_1r_2) = C_Y(w_1r_1r_2) = C_U(r_1r_2) \cdot X_4$ . Aus der Struktur der Sylow 2-Untergruppe von  $M_{22}$  können wir schließlich die Aussagen über  $O_2(C_Y(r_1r_2))$  ableiten.

Wir untersuchen nun, wie  $X$  auf  $C_U(r_1) \cdot r_1$  operiert. Es ist  $C_U(r_1) = [U, r_1] \cdot \langle u_3, v_2r_2, v_3d_2 \rangle$ ; da  $r_1 \in \text{ccl}_j(u_1)$  und  $u_3r_1 \in \text{ccl}_j(w_1)$  ist, gibt es dann noch genau zwei weitere  $H_1$ -Klassen und deren Repräsentanten sind  $r_1$  und  $u_3r_1$ . Da  $r_1$  in  $C_U(r_1) \cdot r_1$  genau 16  $X$ -Konjugierte hat, folgt  $C_X(r_1)/C_U(r_1) \cong \text{Hol}(E(2^3))$  und  $C_X(u_3r_1)/C_U(r_1) \cong E(2^3) \cdot \text{Sym}_4$ .

Mit Hilfe der Relationen in (3.2) und (3.3) können wir nun  $C_2$  wie angegeben berechnen und ebenso bestätigen, daß  $C_3 = C_X(r_1)$  die Gruppe  $C_U(r_1) \cdot \langle r_0, r_2, d_2, r_1r_3d_1, t_1s_2, y_1, r_1s_1 \rangle$  mit Index 7 enthält. Insbesondere zerfällt dann  $C_3$  über  $C_U(r_1)$ ; also gilt o.B.d.A. dann  $C_3 = C_U(r_1) \cdot X_3$ .

Um  $Q = O_2(C_3)$  zu bestimmen, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $M_1 = (M_1)' \cdot \langle r_1 \rangle$  ist und daß die Gruppe  $E_2 \cdot \langle r_1 r_3 d_1, t_1 s_2, y_1, r_1 s_1 \rangle$  in  $(M_1)'$  enthalten ist; außerdem können wir auch annehmen, daß  $C_{(M_1)', (r_1)}$  die Gruppe  $\langle r_0, r_2, d_2, r_1 r_3 d_1, t_1 s_2, y_1, r_1 s_1 \rangle$  enthält.

Offensichtlich liegt  $Q_0 := O_2(C_{(M_1)', (r_1)})$  in der Gruppe  $P := \langle r_0, r_2, d_2, r_1 r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$ . Da  $P \cong \text{Ex}(2^5)$  ist und  $Z(P) = P' = \langle r_0 \rangle$ , folgt  $r_0 \in Q_0$ .

Angenommen, es wäre  $r_2 \in Q_0$ ; dann folgte  $Q_0 \leq C_P(r_2)$  und damit schließlich  $Q_0 \leq E_2$  oder  $Q_0 \leq \langle r_0, r_2, r_1 r_3 d_1, r_1 s_1 \rangle$ . Dies steht aber im Widerspruch zu der Tatsache, daß  $C_{(M_1)', (Q_0)} = Q_0$  ist. Wir haben also gezeigt, daß  $r_2$  nicht in  $Q_0$  liegt. Da  $y_1$  nun  $Q_0$  normalisiert und außerdem  $y_1: r_2 \rightarrow d_2 \rightarrow r_2 d_2$  gilt, folgt dann  $Q_0 \cap \langle r_2, d_2 \rangle = \langle 1 \rangle$ . Daraus folgt unmittelbar, daß  $Q_0 = \langle r_0, r_1 r_2 r_3 d_1, t_1 d_2 s_2 \rangle$  oder  $Q_0 = \langle r_0, r_1 r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$  ist. Also gilt dann  $Q = C_U(r_1) \cdot Q_0 \in \{Q_1, Q_2\}$ .

Alle weiteren Behauptungen über  $Q$  verifiziert man nun leicht mit Hilfe der bekannten Relationen aus (3.2) und (3.3).

(e) Die Behauptungen in diesem Teil wurden bereits in den vorhergehenden Teilen bewiesen.

Q.E.D.

(3.13) Lemma. Es sei  $v = v_2 r_0$  und  $w = u_6 v_2 r_2 r_0$  ;

dann ist  $v^2 = w^2 = u_1$  sowie  $v \in O_2(H)$  und  $w \in H' - O_2(H)$  .

Außerdem gilt  $(sr_0)^2 = v_1 r_0 \in \text{cccl}_J(w_1)$  .

Wir wissen aus (2.8), daß es in  $J$  genau drei Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung vier gibt; offensichtlich sind dann  $v$  ,  $w$  und  $sr_0$  Vertreter dieser Klassen. Ferner gilt folgendes:

(a) Es sei  $x = a_1[s, q_1]d_2t_2$  ,  $x_1 = x^2$  und  $y_1 = a_1r_2ss_2t_1$  ; dann gilt  $x^3 = u_1[s, q_1]^3 = u_1$  und  $x_1 = a_1^2[s, q_1]^2v_3v_4d_2t_2$  sowie  $(y_1)^2 = u_1v_1r_0v_2r_2$  und  $(y_1)^4 = 1$  .

Es ist  $X_1 := \langle w_2, u_1s_2, a_3, x_1 \rangle \cong L_2(11)$  und außerdem  $X_0 := [E, X_1] = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1v_2r_0, v_1r_2, r_1, r_3, d_1, s_1 \rangle$  mit  $X_0 = \text{Ex}(2^{11})$  . Zudem gilt  $C_E(v) = \langle v \rangle * X_0$  sowie  $C_{H_1}(v) = C_E(v) \cdot X_1$  und  $C_H(v) = C_{H_1}(v) \langle y_1 \rangle$  , wobei  $C_H(v)/C_E(v) \cong \text{PGL}_2(11)$  ist und  $C_H(v)$  nicht über  $C_E(v)$  zerfällt.

(b) Es ist  $C_E(w) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1v_2, v_1r_0, r_2 \rangle$  ,  $O_2(C_H(w)) = C_E(w) \langle u_6, r_3d_2, s_1t_2, r_1v_3d_2, d_1v_4t_2, r_0st_1 \rangle$  und  $C_H(w) = O_2(C_H(w)) \cdot \langle a_3, s_2 \rangle$  ; insbesondere ist  $|C_H(w)| = 2^{15 \cdot 3}$  .

(c) Es ist  $C_J(sr_0) = \langle sr_0 \rangle \times U_0 \cdot A^* \cong Z_4 \times [E(2^6) \cdot L_3(2)]$  mit  $A^* = \langle r_1r_3d_1, r_1s_1, t_1s_2, a_3, d_1q_0 \rangle \cong L_3(2)$  .

Beweis. (a) Wir berechnen zunächst aus den Relationen in (3.2) und (3.3), daß  $C_E(v) = \langle v \rangle * X$  ist mit  $X \cong \text{Ex}(2^{11})$  und  $X = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1v_2r_0, v_1r_2, r_1, r_3, d_1, s_1 \rangle$  . Ebenso verifizieren wir, daß  $C_{H_0}(v)$  die Elemente  $w_2, s_2, a_3$  und  $x$  enthält und daß außerdem  $y_1$  in  $C_H(v)$  enthalten ist; ferner verifizieren wir auch die Aussagen über  $x^2$  und  $(y_1)^2$  sowie die Tatsache, daß  $x^3 = u_1[s, q_1]^3$  ist.



Da  $C_{H_1}(v)/C_E(v) \cong L_2(11)$  und  $C_E(v) \cdot \langle w_2, s_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_{H_1}(v)$  ist, folgt  $C_{H_1}(v) = C_E(v) \cdot X_1$  mit  $X_1 \cong L_2(11)$ . Da  $Z_2 \times \text{Sym}_3 \cong \langle w_2 \rangle \times \langle a_3, s_2 \rangle \leq C_{H_0}(v)$  ist und da Untergruppen vom Isomorphietyp  $Z_2 \times \text{Sym}_3$  maximal in  $L_2(11)$  sind, ist  $C_{(H_0)_1}(v) = \langle u_1, w_2, s_2, a_3, x \rangle \cong Z_2 \times L_2(11)$ . Insbesondere können wir annehmen, daß  $X_1 = (C_{(H_0)_1}(v))'$  ist. Da  $x: w_2 \rightarrow u_1 a_3 s_2 \rightarrow w_2 \cdot u_1 a_3 s_2 \rightarrow w_2$  gilt, ist dann offensichtlich  $Y := \langle w_2, u_1 a_3 s_2 \rangle \in \text{Syl}_2(X_1)$ ; ferner normalisiert  $x$  die Gruppe  $Y$  und es ist  $[Y, \langle x^3 \rangle] = \langle 1 \rangle$ . Damit folgt  $x^3 \in \langle u_1 \rangle$  und insbesondere  $[s, q_1]^3 \in \langle u_1 \rangle$ .

Wir zeigen nun mit den Relationen aus (3.2) und (3.3), daß für  $x_0 = u_1 u_2 u_5 t_1 q_0^3 a_3^2 r_3$  und  $\tilde{s} = [s, q_1]$  die folgenden Relationen gelten:  $\tilde{s}: x_0 \rightarrow u_2 v_1 x_0 \rightarrow u_1 u_5 v_1 r_0 r_1 d_1 \cdot u_2 v_1 x_0 \rightarrow x_0$ . Damit erhalten wir dann  $(\tilde{s})^3 \in C_J(x_0)$ . Da  $[u_1, x_0] \neq 1$  ist, folgt schließlich  $x^3 = u_1$  und  $\alpha(x_1) = 3$ .

Nun ist klar, daß  $X_1 = \langle w_2, u_1 s_2, a_3, x_1 \rangle$  ist. Da  $X$  die einzige  $\langle a_1 \rangle$ -invariante Untergruppe der Ordnung  $2^{11}$  in  $C_E(v)$  ist und  $C_E(X_1) = \langle v, v_1 v_2 r_2 \rangle \cong Q_8$  sowie  $E = X_0 * C_E(X_1)$  ist, folgt dann  $X_0 = X$ .

Wir wissen bereits, daß  $C_H(v)/C_E(v) \cong \text{PGL}_2(11)$  ist. Da Involutionen aus  $H - H'$  keine Elemente der Ordnung vier in  $O_2(H)$  zentralisieren, kann  $C_H(v)$  nicht über  $C_E(v)$  zerfallen. Damit ist (a) bewiesen.

(b) Es sei  $\bar{H} := H/O_{2,3}(H)$ . Dann ist  $\bar{w}$  eine Involution in  $\bar{H}'$ . Also ist  $C_{\bar{H}}(\bar{w}) = \bar{U} \cdot \langle \bar{d}_2, \bar{t}_2, \bar{a}_3, \bar{s}_2 \rangle \cdot \langle \bar{t}_1 \rangle$  isomorph zu  $E(2^5) \cdot \text{Sym}_4$ .

Wir berechnen nun  $C_E(w) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1 v_2, v_1 r_0, r_2 \rangle$ ; da  $|C_E(w)| = 2^8$  ist und da  $\langle a_1 \rangle$  fixpunktfrei auf  $E = Z(E)$  operiert, gilt dann  $C_{E\langle a_1 \rangle}(w) = C_E(w)$ .

Mit Hilfe der Relationen in (3.2) und (3.3) verifizieren wir nun leicht die Behauptungen in (b) .

(c) Da  $(sr_0)^2 = v_1 r_0 \in \text{ccl}_M(w_1)$  ist, folgt also  $C_J(sr_0) = C_M(sr_0) \leq C_M(v_1 r_0) \wedge C_M(r_0 \bmod U) = U \cdot E_1 \cdot A_0$  .  
 Da  $C_{A_2}(r_0) = \langle r_1, d_1, t_1 \rangle \cdot A_0$  und  $C_{A_2}(s) = A \approx \text{Alt}_7$  ist und da  $A$  transitiv auf den 15 Involutionen aus  $E_2$  operiert, ist dann offensichtlich  $A^* := C_{A_2}(s, r_0) \approx L_3(2)$  .

Mit Hilfe der Relationen in (3.2) und (3.3) berechnen wir nun leicht, daß  $A^* = \langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2, a_3, d_1 q_0 \rangle$  ist. Damit folgt dann auch  $C_M(sr_0) = C_U(r_0) \cdot A^* = \langle sr_0 \rangle \times U_0 \cdot A^*$  .

Q.E.D.

Wir wollen in den folgenden Lemmata die  $p$ -lokale Struktur von  $J$  für die ungeraden Primteiler  $p$  von  $|J|$  untersuchen.

(3.14) Lemma. (a) Ist  $X$  eine Sylow 3-Untergruppe von  $J$ , so ist  $X$  eine extraspezielle Gruppe der Ordnung  $3^3$  und vom Exponenten 3; ferner ist  $N_J(X) \cong Z_2 \times \text{Ex}(3^3) \cdot \text{SD}_{16}$ .

(b) In  $J$  gibt es genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen der Ordnung 9; ist  $Y$  ein Repräsentant dieser Klasse, so ist  $Y \cong E(3^2)$ ,  $C_J(Y) = Y \times C$  mit  $C \cong E(2^3)$  und  $N_J(Y) = C_J(Y) \cdot N$  mit  $N \cong \text{GL}_2(3)$ .

Ferner ist  $C_0 := \langle C \cap \text{ccl}_J(w_1) \rangle \cong E(2^2)$  und  $C - C_0 = C \cap \text{ccl}_J(u_1)$ .

Beweis. Die Aussagen des Teiles (a) wurden bereits in [J] bewiesen.

Da  $J$  nur eine Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung drei hat und der Zentralisator eines solchen Elementes in  $J$  isomorph zu  $\hat{M}_{22}$  ist und außerdem  $M_{22}$  nur eine Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung drei hat, gibt es somit in  $J$  nur eine Klasse von Untergruppen der Ordnung 9 und diese sind offensichtlich auch elementar-abelsch.

Es sei nun  $E(3^2) \cong Y \leq J$ ; wir können o.B.d.A. annehmen, daß  $\langle a_1 \rangle < Y = \langle a_1, h \rangle \leq H_0$  ist. Wir setzen  $G = C_J(Y \bmod \langle a_1, u_1 \rangle)$ . Dann ist  $G/\langle a_1, u_1 \rangle \cong Z_3 \times \text{Alt}_4$ . Wir berechnen nun leicht, daß jedes 2-Element aus  $G$  auch  $h$  zentralisiert. Da nach (3.13)  $Y$  nicht von Elementen der Ordnung vier zentralisiert wird, folgt nun  $C_J(Y) = Y \times C$  mit  $C \cong E(2^3)$ .

Wählen wir speziell  $h = a_3$ , so gilt  $Y \leq M$  und es ist  $C_U(Y) = \langle u_1, w_2, s \rangle$  mit  $C_U(Y) \cap \text{ccl}_J(u_1) = u_1 \cdot \langle w_2, s \rangle$ . Damit folgen die Aussagen über  $C_0$  und  $C - C_0$ . Da außerdem  $N_M(\langle w_2, s \rangle) \cong E(2^{11}) \cdot L_3(4) \cdot \text{Sym}_3$  ist, folgt schließlich auch die Aussage über  $N_J(Y)$ .

Q.E.D.

(3.15) Lemma. In  $M := U \cdot M_0$  gibt es genau zwei konjugierten Klassen von Untergruppen der Ordnung 9 und die Gruppen  $Y_1 := \langle a_1, a_3 \rangle$  und  $Y_2 := \langle a_1, a_6 \rangle$  sind Repräsentanten dieser beiden Klassen. Ferner gilt folgendes:

(a) Es ist  $N_M(Y_1) = N_J(Y_1)$ ; insbesondere enthält  $Y_1$  nur 3-zentrale 3-Elemente aus  $M$ .

(b) Es ist  $C_M(Y_2) = \langle u_1 \rangle \times Y_2$  und  $N_M(Y_2) = C_M(Y_2) \cdot N$  mit  $N \cong Z_2 \times \text{Sym}_3$ ; die Elemente aus  $Y_2 - \langle a_1 \rangle$  sind alle nicht-3-zentral in  $M$ .

(c) Es sei  $\bar{M} = M/U$  und  $\bar{X}_i$  eine maximale Untergruppe von  $\bar{M}$  mit  $\bar{Y}_i \in \text{Syl}_3(\bar{X}_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$ ; dann ist  $\bar{X}_1$  isomorph zu  $M_{23}$ ,  $\text{Aut}(M_{22})$  oder  $E(2^4) \cdot \text{Alt}_8$  und  $\bar{X}_2$  ist isomorph zu  $E(2^6) \cdot [\text{Sym}_3 \times L_3(2)]$ .

Beweis. Bekanntlich gibt es in  $M_{24}$  genau zwei konjugierten Klassen von Elementen der Ordnung drei. Da nach (3.2), (3.3), (3.10) und (3.11)  $a_1$  und  $a_6$  Elemente der Ordnung drei aus  $M$  sind mit  $C_U(a_1) = \langle u_1, u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, s \rangle$  und  $C_U(a_6) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$  sowie  $\langle q_2 \rangle \in \text{Syl}_7(C_M(a_6))$ , sind dann offensichtlich  $a_1$  und  $a_6$  Repräsentanten der beiden Klassen von Elementen der Ordnung drei in  $M$ , wobei  $N_M(\langle a_1 \rangle)/C_U(a_1) \cong 3\text{Sym}_6$  und  $N_M(\langle a_6 \rangle)/C_U(a_6) \cong \text{Sym}_3 \times L_3(2)$  ist. Wir wissen ferner, daß  $C_U(Y_1) = \langle u_1, u_6, s \rangle$  und  $C_U(Y_2) = \langle u_1 \rangle$  ist. Alle weiteren Aussagen des Lemmas folgen nun trivialerweise aus den entsprechenden Eigenschaften der Gruppe  $M_{24}$ .

Q.E.D.

(3.16) Lemma. Es sei  $X \in \text{Syl}_5(J)$ ,  $N = N_J(X)$  und  $Q = O_2(N)$ ; dann gilt folgendes:

(a) Es ist  $C_J(X) = X \times C$  mit  $C \cong E(2^3) \setminus L_3(2)$  und  $N = (X \times C) \cdot \langle v \rangle$ , wobei  $\langle v \rangle \cong Z_4$  und  $X \cdot \langle v \rangle \cong F_{20}$  ist. Ferner gilt  $[C, \langle v^2 \rangle] = \langle 1 \rangle$ ,  $[C, \langle v \rangle] = O_2(C) = Q$  und  $C_C(v) = Q \cdot F$  mit  $F \cong F_{21}$ .

(b) Es sei  $P \in \text{Syl}_2(C)$  und  $Q = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ ; dann wird  $P$  erzeugt von  $Q$  und Elementen  $y$  und  $z$  mit  $o(y) = 8$ ,  $o(z) = 2$  und den folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} y: x_1 &\rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1 x_2 x_3 \rightarrow x_1; \\ z: x_1 &\rightarrow x_3 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow x_2, y \rightarrow y^7. \end{aligned}$$

Sowohl in  $P$  als auch in  $C$  gibt es genau zwei konjugierten Klassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung 8; Repräsentanten dieser Klassen sind  $Z_1 = \langle y \rangle$  und  $Z_2 = \langle x_1 y \rangle$ . Für  $i \in \{1, 2\}$  ist dann  $C_C(Z_i) = C_P(Z_i) = Z_i$  und  $N_C(Z_i) = N_P(Z_i)$  mit  $N_C(Z_i)/Z_i \cong \text{Aut}(Z_i) \cong E(2^2)$ . Außerdem ist  $(Z_1)^v \in \text{ccl}_C(Z_2)$ .

(c) Es ist  $\emptyset \neq C \cap \text{ccl}_J(w_1) \leq (C - Q)$  und  $C \cap \text{ccl}_J(u_1) = Q - \langle 1 \rangle$ .

(d) Es sei  $Y$  eine elementar-abelsche Untergruppe von  $P$ ; dann gilt  $|Y| \leq 2^3$ . Ist  $Y \cong E(2^3)$ , so liegt einer der folgenden Fälle vor:

- (1)  $Y = Q$  und  $N_J(Y)$  ist in  $J$  zu  $K$  konjugiert;
- (2)  $Y \neq Q$  und  $N_J(Y)$  ist in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H$  konjugiert.

Beweis. Die Aussagen von Teil (a) werden in Propos. 16 [J] bewiesen. In [50] werden von Q'Nan Erzeugende und Relationen einer Sylow 2-Untergruppe von C angegeben. Damit können wir nun leicht alle weiteren Behauptungen im Teil (b) bestätigen. Da N die J-Fusion in C kontrolliert, können wir außerdem mit Hilfe der Resultate in (2.8) die Aussagen im Teil (c) verifizieren.

Ist nun Y eine elementar-abelsche Untergruppe von P, so folgt aus den Relationen in (b), daß  $|Y| \leq 8$  ist.

Da nach (3.10) offensichtlich  $Q \in \text{ccl}_J(Z(R))$  ist, können wir nun also o.B.d.A. annehmen, daß  $Y \cong E(2^3)$  und  $Y \neq Q$  ist.

Wir setzen  $Y_0 = Y \cap Q$  sowie  $C_1 = C_J(Y)$  und  $N_1 = N_J(Y)$ . Mit (c) folgt sofort, daß  $\langle 1 \rangle \neq Y_0 \triangleleft N_1$  ist. Die Behauptung in (2) folgt trivialerweise im Falle  $Y_0 \cong Z_2$ ; daher nehmen wir an, daß  $Y_0 \cong E(2^2)$  ist. Dann ist  $(YQ)/Q \cong Z_2$  und somit ist  $N_1 \cap (C \cdot \langle v \rangle)$  eine 2-Gruppe. Das Frattini-Argument liefert nun  $N_1 = C_1(N_1 \cap N) = C_1(N_1 \cap C \cdot \langle v \rangle)$ . Damit folgt dann  $Z(N_1) \cap Y_0 \neq \langle 1 \rangle$  und somit die Behauptung in (2).

Q.E.D.

(3.17) Lemma. Ist  $X \in \text{Syl}_7(J)$ , so gilt  $N_J(X) = F \times C$ , wobei  $C \cong \text{Sym}_5$  und F eine Frobeniusgruppe der Ordnung 21 ist. Ferner ist  $\text{ccl}_J(u_1) \cap C \leq (C - C')$  und  $\text{ccl}_J(w_1) \cap C \leq C'$ .

Beweis. Wir haben bereits in (3.10) festgestellt, daß ein Sylow 7-Normalisator in J isomorph zu  $F_{21} \times \text{Sym}_5$  ist. Aus (2.8) entnehmen wir, daß für  $x \in J$  mit  $o(x) = 28$  stets  $(x)^{14}$  in  $\text{ccl}_J(w_1)$  liegt. Da  $N_J(X)$  die J-Fusion in C kontrolliert, sind die Involutionen aus  $C - C'$  alle in  $\text{ccl}_J(u_1)$  enthalten.

Q.E.D.

(3.18) Lemma. Es sei  $X \in \text{Syl}_{11}(J)$  und  $N = N_J(X)$  :  
dann gilt folgendes:

(a)  $X$  ist eine extraspezielle Gruppe der Ordnung  $11^3$   
und vom Exponenten 11 ; ferner ist  $C_J(X) = Z(X)$  und  
 $N = X \cdot (F \times G)$  mit  $F \cong Z_5$  und  $G \cong \text{GL}_2(3)$  .

Die Gruppe  $N$  operiert transitiv auf  $Z(X) - \langle 1 \rangle$  und  
auf  $X - Z(X)$  ; die Involution aus  $Z(G)$  operiert inver-  
tierend auf  $X/Z(X)$  .

(b) Es sei  $1 \neq x_1 \in Z(X)$  und  $x_2 \in X - Z(X)$  sowie  
 $X_i = \langle x_i \rangle$  für  $i \in \{1, 2\}$ . Dann sind  $x_1$  und  $x_2$  Repräsen-  
tanten der beiden Konjugiertenklassen von Elementen der Ord-  
nung 11 in  $J$  ; außerdem ist  $C_J(X_1) = X \cdot G'$  ,  $C_J(X_2) \cong E(11^2) \cdot Z_2$   
und  $N_J(X_2) < N = N_J(X_1)$  mit  $N_J(X_i)/C_J(X_i) \cong Z_{10}$  ( $i = 1, 2$ ) .

$X_1$  ist in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H$  konjugiert,  
während  $X_2$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H_1$  konjugiert ist.

(c) Ist  $E(11^2) \cong Y < X$  , so gilt  $C_J(Y) = Y$  und  
 $N_J(Y) = Y \cdot C \leq N$  mit  $C \cong F_{110} \times Z_2$  .

(d) Es sei  $J_0$  eine Untergruppe von  $J$  und  $Y \neq \langle 1 \rangle$   
eine Sylow 11-Untergruppe von  $J_0$  . Dann ist  $Y$  eine  
TI-Menge in  $J_0$  und insbesondere ist  $|J_0 : N_J(Y)| \equiv 1 \pmod{11}$  .

Beweis. In  $[J]$  (§6 und Prop. 26) werden die Behauptungen  
unter (a) und (b) bewiesen.

Ist nun  $E(11^2) \cong Y \leq X$ , so folgt aus (a) und (b) sofort,  
daß  $C_J(Y) = Y$  und  $N_J(Y) \leq N$  ist. Offensichtlich zerfällt  
 $N_N(Y)$  über  $Y$  und es ist dann  $N_N(Y) = Y \cdot C$  mit  $C \leq N$  und  
 $O_{11}(C) = C \cap X \cong Z_{11}$  . Da  $N$  transitiv auf  $X - Z(X)$  operiert,  
können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $Y = X_1 \times X_2$  ist. Nun ist

klar, daß  $N_N(X_2) \leq N_N(Y)$  ist. Da außerdem  $N_N(Y)$  die Fusion in  $Y - X_1$  kontrolliert, folgt  $|N_N(Y) : C_N(X_2)| = 110$  und damit auch  $C = F_{110} \times Z_2$ .

Es sei nun  $J_0 \leq J$  und  $Y \in \text{Syl}_{11}(J_0)$  mit  $Y \neq \langle 1 \rangle$ . Ist  $Y \cong Z_{11}$ , so ist  $Y$  trivialerweise eine TI-Menge in  $J_0$ ; in den anderen Fällen können wir mit Hilfe der Aussagen in (b) und (c) leicht nachweisen, daß  $Y$  eine TI-Menge in  $J_0$  ist.

Q.E.D.

(3.19) Lemma. Es sei  $p \in \{23, 29, 31, 37, 43\}$  und  $X$  eine Sylow  $p$ -Untergruppe von  $J$  sowie  $N = N_J(X)$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Es ist  $C_J(X) = X \cong Z_p$  und  $N$  eine Frobeniusgruppe der Ordnung  $p \cdot q$ , wobei  $q = (p-1)/d$  mit  $d = \text{ggT}(3, p-1)$  ist.

(b) Ist  $x$  eine Involution aus  $N$ , dann ist  $x$  eine nicht-2-zentrale Involution aus  $J$  und somit in  $\text{ccl}_J(w_1)$  enthalten.

Beweis. Die Aussagen unter (a) werden in  $[J]$  bewiesen und sind dort in Theorem A aufgelistet.

Ist  $y \in J$  mit  $o(y) = 28$ , so ist nach (2.8) die Involution  $(y)^{14}$  ein Element aus  $\text{ccl}_J(w_1)$ .

Ist  $z \in J$  mit  $o(z) = 23$  und ist  $y \in N_J(\langle z \rangle)$  mit  $o(y) = 11$ , so können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $\langle z, y \rangle$  in  $M$  enthalten ist. Da  $C_U(y) = \langle w \rangle \cong Z_2$  mit  $w \in \text{ccl}_M(w_1)$  ist, folgt mit (3.18) nun, daß  $y$  ein nicht-11-zentrales 11-Element



in  $J$  ist und somit die Involution aus  $N_J(\langle z \rangle)$  auch in  $\text{ccl}_J(w_1)$  liegt.

Um also die Behauptungen in Teil (b) zu beweisen, können wir nun annehmen, daß  $p \in \{31, 37, 43\}$  ist. Insbesondere ist dann  $N \cong Z_p \cdot Z_q$  mit  $q = (p - 1)/3$ .

Wir wählen nun Elemente  $x_1, x_2$  und  $x_3$  aus  $X$  derart, daß sie Repräsentanten der drei verschiedenen Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung  $p$  in  $N$  (und somit auch in  $J$ ) sind; ferner sei  $y$  ein Repräsentant der einzigen Klasse von Involutionen in  $N$ . Offensichtlich hat  $N$  genau  $q + 3$  verschiedene Konjugiertenklassen. Somit hat auch die Menge  $\Gamma(N)$  der irreduziblen komplexen Charaktere von  $N$  genau  $q + 3$  verschiedene Elemente. Die Menge  $\Gamma(N)$  ist dann eine disjunkte Vereinigung der folgenden drei Teilmengen:

$$\Gamma_0 = \{ \varphi \in \Gamma(N) \mid \varphi(1) = q, \varphi|_{N-X} \equiv 0 \},$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda \in \Gamma(N) \mid \lambda(1) = \lambda(x_1) = \lambda(y) = 1 \},$$

$$\Gamma_2 = \{ \lambda \in \Gamma(N) \mid \lambda(1) = \lambda(x_1) = 1, \lambda(y) = -1 \}.$$

Dabei ist  $|\Gamma_0| = 3$  und  $|\Gamma_1| = |\Gamma_2| = q/2$ .

Wir setzen nun  $\Gamma_0 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  und vermerken noch, daß für  $i \in \{1, 2, 3\}$  stets  $\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_1) + \varphi_3(x_1) = -1$  und  $\varphi_i(x_1) + \varphi_i(x_2) + \varphi_i(x_3) = -1$  ist.

Wir nehmen nun an, daß  $y$  in  $J$  zu  $u_1$  konjugiert ist. Wir wissen, daß  $J$  einen irreduziblen komplexen Charakter vom Grad 1333 besitzt; dessen Einschränkung auf  $N$  bezeichnen wir mit  $\chi$ . Dann ist also  $\chi_1 = \chi(1) = 1333$ ,  $\chi_2 = \chi(y) = 53$  und  $\chi_p = \chi(x_1) = \chi(x_2) = \chi(x_3)$  mit  $\chi_{31} = \chi_{43} = 0$  und  $\chi_{37} = 1$ .

Wir bezeichnen nun mit  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  das übliche Skalarprodukt von Charakteren und setzen  $k = \langle \chi | \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \rangle$  sowie  $l = \sum \langle \chi | \lambda_1 \rangle$  und  $m = \sum \langle \chi | \lambda_2 \rangle$ , wobei die Summen über  $\lambda_i \in \Gamma_i$  für  $i \in \{1, 2\}$  genommen werden. Damit erhalten wir dann die folgenden Gleichungen:

$$\chi_1 = l + m + q \cdot k ,$$

$$\chi_2 = l - m \quad \text{und}$$

$$3 \cdot \chi_p = \chi(x_1) + \chi(x_2) + \chi(x_3) = 3(l + m) - k .$$

Diese Gleichungen liefern schließlich

$$2 \cdot m = (\chi_1 - \chi_p) / p + \chi_p - \chi_2 .$$

Daraus berechnen wir nun  $m$  in jedem der drei möglichen Fälle und erhalten  $m \in \{-5, -8, -11\}$ ; wir haben damit einen Widerspruch hergeleitet, denn  $m$  ist andererseits eine nichtnegative ganze Zahl.

Wir haben also gezeigt, daß  $y$  in  $\text{ccl}_J(w_1)$  liegt.

Q.E.D.

Nachdem wir nun die lokale Struktur von  $J$  für ungerade Primteiler von  $|J|$  weitgehend geklärt haben, wollen wir uns jetzt noch mit einigen speziellen 2-lokalen Untergruppen von  $J$  beschäftigen.

(3.20) Lemma. Ist  $X$  eine nichttriviale 2-Untergruppe von  $J$  derart, daß  $N_J(X)$  eine zyklische Untergruppe der Ordnung 31 enthält, dann ist  $X$  elementar-abelsch von der Ordnung  $2^5$  oder  $2^{10}$ ; außerdem ist  $C_J(X)$  in  $J$  zu  $V$  konjugiert.

Beweis. Wir setzen  $N = N_J(X)$  und  $C = C_J(X)$ ; ferner sei  $Z_{31} \cong Z \leq N$ . Da  $C_J(Z) = Z$  ist und  $Z$  keine nicht-trivialen  $\{2, 31\}$ -Gruppen in  $J$  normalisiert, ist  $C$  nach dem Frattini-Argument eine 2-Gruppe; daher sei  $Q = \Omega_1(Z(C))$ . Offensichtlich ist  $Q \cong E(2^5)$  oder  $Q \cong E(2^{10})$ .

Ist  $Q \cong E(2^{10})$ , so ist offensichtlich  $C_J(Q) = Q \in \text{ccl}_J(V)$  und  $C = Q$ ; da  $X \leq C_J(C) = C$  ist, erhalten wir nun die Behauptung des Lemmas.

Wir nehmen nun also an, daß  $Q \cong E(2^5)$  ist. Da die Zentralisatoren von Involutionen in  $J$  keine Sektionen isomorph zu  $E(2^4) \cdot \text{Alt}_8$  enthalten, ist  $N_J(Q)/C_J(Q)$  isomorph zu  $Z_{31}$  oder  $Z_{31} \cdot Z_5$ . Offensichtlich ist  $C_J(Q)$  eine 2-Gruppe der Ordnung  $2^n$  mit  $n \in \{10, 15\}$ ; ferner ist  $Q$  nicht charakteristisch in  $C_J(Q)$ . Also ist  $Q < Q_0 := \Omega_1(Z(C_J(Q)))$ . Da  $Z$  auf  $Q_0$  operiert, erhalten wir  $Q_0 = C_J(Q_0) \cong E(2^{10})$  und damit  $C_J(Q) \leq C_J(Q_0) = Q_0 \leq C_J(Q)$ . Somit ist  $C \leq C_J(Q) = Q_0$  und insbesondere ist  $C$  elementar-abelsch; damit ist  $Q = C$ . Es folgt  $X \leq C_J(Q) = Q_0$  und somit  $Q_0 \leq C_J(X) = C = Q$ ; dies widerspricht der Tatsache, daß  $Q$  eine echte Untergruppe von  $Q_0$  ist. Also kann  $Q$  nicht isomorph zu  $E(2^5)$  sein.

Q.E.D.

(3.21) Lemma. Es sei  $Z$  eine Sylow 31-Untergruppe von  $L = V \cdot L_0$ . Dann gibt es genau zwei nichttriviale  $Z$ -invariante Untergruppen  $W_1$  und  $W_2$  in  $V$ .

Für  $i \in \{1, 2\}$  ist  $W_i \cong E(2^5)$ ,  $C_J(W_i) = V$  und  $N_J(W_i) = V \cdot Z \cdot F$  mit  $F \cong Z_5$  und  $Z \cdot F = N_L(Z)$ . Außerdem ist  $(W_i - \langle 1 \rangle) \subseteq \text{ccl}_L(W_i)$ .

Die Gruppen  $W_1$  und  $W_2$  sind in  $J$  nicht konjugiert und als  $GF(2)$   $Z$ -Moduln nicht isomorph.

Beweis. Es sei daran erinnert, daß  $d_0$  und  $f_0$  Elemente aus  $L_0$  sind mit  $o(d_0) = 31$ ,  $o(f_0) = 5$  und  $f_0: d_0 \mapsto (d_0)^2$ . Wir können also o.B.d.A.  $Z = \langle d_0 \rangle$  und  $F = \langle f_0 \rangle$  setzen.

Wir wissen, daß die Menge  $\Pi = \{u_i, v_j \mid 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 4\}$  eine Basis von  $V$  ist. Identifizieren wir nun die Elemente von  $V$  mit Spaltenvektoren über  $GF(2)$ , so erhalten wir dann mit einfachen Rechnungen unter Zuhilfenahme der Relationen in (3.2) die folgende Matrixdarstellung  $\Theta(d_0)$  bzgl.  $\Pi$ :

$$\Theta(d_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen, daß  $C_V(f_0) = \langle w_1, w_2 \rangle$  ist mit  $w_1 = u_3 u_4$  und  $w_2 = u_1 u_6$ . Wir setzen nun  $x_j = (d_0)^{-j} \cdot w_1 \cdot (d_0)^j$  sowie  $y_j = (d_0)^{-j} \cdot w_2 \cdot (d_0)^j$  für  $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Dann ist die Menge  $\Pi' = \{x_0, \dots, x_4, y_0, \dots, y_4\}$  eine Basis von  $V$ , bezüglich der das Element  $d_0$  die folgende Matrixdarstellung  $\Phi(d_0)$  hat:

$$\phi(d_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist für  $i \in \{1, 2\}$  dann  $W_i = \langle \text{ccl}_Z(w_i) \rangle$  eine  $Z$ -invariante Untergruppe der Ordnung 32 von  $V$  mit  $V = W_1 \times W_2$ .

Bezeichnen wir mit  $\phi_i$  die Einschränkung von  $\phi(d_0)$  auf  $W_i$ , so ist  $\text{Sp}(\phi_1) = 0$  und  $\text{Sp}(\phi_2) = 1$ . Dann sind  $W_1$  und  $W_2$  also nicht isomorph als  $Z$ -Moduln; insbesondere gibt es in  $V$  keine weiteren nichttrivialen  $Z$ -invarianten Untergruppen.

Nach (3.20) wissen wir schon, daß  $C_J(W_1) = C_J(W_2) = V$  ist. Ist nun  $1 \neq x \in W_i$ , so existiert offensichtlich ein Element  $j \in \{0, 1, \dots, 30\}$  mit  $x = (d_0)^{-j} \cdot w_i \cdot (d_0)^j$ ; dann gilt ferner  $(f_0)^4 \cdot x \cdot f_0 = (d_0)^{-2j} \cdot w_i \cdot (d_0)^{2j} \in W_i$ . Also normalisiert  $Z \cdot F$  die Gruppen  $W_1$  und  $W_2$ . Da  $Z \cdot F$  maximal in  $L_0$  ist und da  $L_0$  irreduzibel auf  $V$  operiert, folgt  $N_J(W_i) = V \cdot Z \cdot F$  für  $i \in \{1, 2\}$ . Da  $N_J(V \cdot Z \cdot F) = V \cdot Z \cdot F$  ist, sind dann  $W_1$  und  $W_2$  nicht in  $J$  konjugiert.

Q.E.D.

(3.22) Lemma. Es seien  $X$  und  $Y$  Untergruppen von  $J$  mit  $X \cong \text{Alt}_8$  und  $Y \cong \text{Alt}_7$ . Dann ist  $N_J(X) = X$  und  $N_J(Y) = C_J(Y) \times Y$  mit  $|C_J(Y)| \leq 2$ .

Beweis. Es sei  $Z \in \{X, Y\}$ . Da es nach (3.17) in  $J$  Diedergruppen der Ordnung 14 gibt, ist  $N_J(Z) = C_J(Z) \times Z$ . Mit (3.14) erhalten wir nun, daß  $C = C_J(Z)$  eine elementarabelsche 2-Gruppe ist; mit (3.17) folgt jetzt  $|C| \leq 4$ . Mit den Resultaten aus (3.11) und (3.12) sehen wir nun leicht, daß im Falle  $Z = X$  stets  $C = \langle 1 \rangle$  ist und daß im Falle  $Z = Y$  die Gruppe  $C$  höchstens die Ordnung 2 hat.

Q.E.D.

(3.23) Lemma. Es sei  $x = a_1 a_2 t_1 t_2 t_0$  und  $E^* = (E_1)^x$ ; dann ist  $N_{L_0}(E^*) = E^* \cdot A_2 \cong \text{Hol}(E(2^4))$  und  $C_V(E^*) = V_1$ . Ferner gilt folgendes:

(a) In  $L$  gibt es genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu  $\text{Alt}_7$  und  $A$  ist ein Repräsentant dieser Klasse. Die Gruppen  $A_2$  und  $(A_2)^S$  sind Repräsentanten der beiden Konjugiertenklassen von Untergruppen isomorph zu  $\text{Alt}_8$  in  $L$ .

(b) Ist  $X \in \{A, A_2, (A_2)^S\}$ , so sind  $V \cdot E^*$  und  $V \cdot E_2$  genau die maximalen  $X$ -invarianten 2-Untergruppen von  $L$ .

In  $V \cdot E_2$  gibt es genau die folgenden nichttrivialen  $X$ -invarianten Untergruppen:  $V_1, E_2, U_0, V, W, U^*, V \cdot E_2$ .

Ist  $X \in \{A, A_2\}$ , so gibt es in  $V \cdot E^*$  genau die folgenden nichttrivialen  $X$ -invarianten Untergruppen:  $V_1, E^*, U_0, V_1 \times E^*, V$  und  $VE^*$ ; von diesen Gruppen sind alle außer  $E^*$  auch invariant unter  $(A_2)^S$ .

(c) Die Gruppen  $E_2 \cdot A$ ,  $V_1 \cdot A$  und  $E^* \cdot A$  sind Repräsentanten der drei verschiedenen  $L$ -Klassen von Untergruppen isomorph zu  $E(2^4) \cdot \text{Alt}_7$ . Ferner gibt es in  $L$  genau fünf konjugierten Klassen von Untergruppen isomorph zu  $E(2^4) \cdot \text{Alt}_8$ ; diese werden repräsentiert durch  $E_2 \cdot A_2$ ,  $E_2 \cdot (A_2)^S$ ,  $V_1 \cdot A_2$ ,  $V_1 \cdot (A_2)^S$  und  $E^* \cdot A_2$ .

Beweis. Wir wissen, daß  $C_V(E_1) = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 \rangle \cong E(2^4)$  ist. Einfache Matrizenrechnungen in der Gruppe  $L_0$  liefern nun  $x: u_1 \rightarrow v_4, u_2 \rightarrow v_3, u_3 \rightarrow v_2 v_4, v_1 \rightarrow v_1$ . Somit erhalten wir dann, daß  $C_V(E^*) = V_1$  ist. Die Tatsache, daß  $N_{L_0}(E^*) = E^* \cdot A_2$  ist, bestätigen wir ebenfalls durch einfache Matrizenrechnungen in  $L_0$ .

Zunächst stellen wir fest, daß es in  $L_0$  jeweils nur eine konjugierten Klasse von Untergruppen isomorph zu  $\text{Alt}_7$  bzw. zu  $\text{Alt}_8$  gibt und daß  $A$  und  $A_2$  Repräsentanten dieser beiden Klassen sind. Es sei nun  $X \leq L$  mit  $X \cong \text{Alt}_n$  für ein  $n \in \{7, 8\}$  und  $Y \in \{A, A_2\}$  mit  $Y \cong X$ . Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß  $V \cdot X = V \cdot Y$  ist. Da  $V = U_0 \times V_1$  eine  $Y$ -invariante direkte Zerlegung von  $V$  in irreduzible  $Y$ -Moduln  $U_0$  und  $V_1$  ist und da  $H^1(Y, V_1) = 0$  ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $X$  in  $U_0 \cdot Y$  enthalten ist; also gilt dann  $U_0 \cdot X = U_0 \cdot Y$ . Wir beachten nun, daß  $U_0 \cdot A_2$  mit Index 2 in  $U_0 \cdot A_2 \cdot \langle s \rangle$  enthalten ist; da nach (3.22)  $N_J(A_2) = A_2$  ist, sind dann  $A_2$  und  $(A_2)^S$  nicht in  $U_0 \cdot A_2$  konjugiert. Da  $H^1(A, U_0) = 0$  und  $H^1(A_2, U_0) \cong Z_2$  ist, folgen nun die Behauptungen unter (a).

Die Tatsache, daß für  $X \in \{A, A_2, (A_2)^S\}$  die maximalen  $X$ -invarianten 2-Untergruppen genau  $V \cdot E^*$  und  $V \cdot E_2$  sind, ergibt sich aus der entsprechenden Eigenschaft der Gruppe  $L_0$ .

Um die  $X$ -invarianten Untergruppen von  $VE_2$  zu bestimmen, können wir wegen  $[A_2, \langle s \rangle] = U_0 = Z(VE_2)$  dann offensichtlich  $X \in \{A, A_2\}$  annehmen. Da  $U_0 \cdot V_1 \cdot E_2 = VE_2$  ist und die Gruppen  $U_0$ ,  $V_1$  und  $E_2$  sowohl als  $A$ -Moduln als auch als  $A_2$ -Moduln irreduzibel sind, sehen wir dann wegen  $(VE_2)' = U_0$ , daß die  $A$ -invarianten Untergruppen von  $VE_2$  genau die  $A_2$ -invarianten Untergruppen von  $VE_2$  sind. Mit (3.7) erhalten wir nun die angegebene Liste.

Wir beachten nun, daß  $A = A_2 \cap (A_2)^S$  ist und bestimmen daher zunächst die  $A$ -invarianten Untergruppen von  $VE^*$ . Die Elemente aus  $I = \{V_1, E^*, U_0, V_1 E^*, V, VE^*\}$  sind offensichtlich alle  $A$ -invariant. Wir beachten nun, daß das Element  $q = d_1 q_0 = r_1 r_3 d_1 \cdot t_1 s_2 \cdot j_2 t_1 \cdot a_3^2$  in  $A$  liegt und die Ordnung 7 hat; ferner ist  $C_{VE^*}(q) = \langle V_1, (r_0 r_1 d_1)^X \rangle \cong E(2^2)$ . Da  $t_1 s_2 \in A$  ist mit  $[t_1 s_2, V_1] = 1$  und  $[t_1 s_2, (r_0 r_1 d_1)^X] = (r_1 t_1)^X$ , sehen wir nun leicht, daß jede  $A$ -invariante Untergruppe von  $VE^*$  in  $I$  liegt.

Offensichtlich sind die Elemente aus  $I$  auch alle invariant unter  $A_2$ . Da  $Z(VE^*) = (VE^*)' = [V, E^*] = V_1$  und  $[A_2, \langle s \rangle] = U_0$  ist, sind außer  $E^*$  alle anderen Elemente aus  $I$  invariant unter  $(A_2)^S$ . Damit ist (b) bewiesen.

Die Aussagen in (c) ergeben sich nun trivialerweise aus den Teilen (a) und (b).

Q.E.D.



(3.24) Lemma. Sei  $I = \{ V_1, E_2, U_0, U_0 \langle s \rangle, V, W, U^*, U, VE_2, UE_2 \}$ ; dann gilt folgendes:

(a) In  $M$  gibt es jeweils genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu  $\text{Alt}_7$  bzw.  $\text{Alt}_8$ ; die Gruppen  $A$  und  $A_2$  sind Repräsentanten dieser beiden Klassen.

(b) Ist  $X \leq M$  mit  $O_2(X) \neq \langle 1 \rangle$  und  $X/O_2(X) \cong \text{Alt}_n$  für ein  $n \in \{7, 8\}$ , so ist  $X$  in  $M$  zu einer Untergruppe von  $U \cdot E_2 \cdot A_2$  konjugiert.

Ist insbesondere  $X = O_2(X) \cdot A_2$ , so ist  $O_2(X) \in I$ ; ist  $X = O_2(X) \cdot A$ , so ist entweder  $O_2(X) \in I$  oder  $O_2(X) = \langle s \rangle$ .

(c) In  $M$  gibt es genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu  $E(2^4) \cdot \text{Alt}_7$  und  $E_2 \cdot A$  ist ein Repräsentant dieser Klasse. Die Gruppen  $E_2 \cdot A_2$  und  $V_1 \cdot A_2$  repräsentieren die beiden Konjugiertenklassen von Untergruppen isomorph zu  $E(2^4) \cdot \text{Alt}_8$  in  $M$ .

Beweis. Bekanntlich gibt es in der Mathieu-Gruppe  $M_{24}$  jeweils nur eine Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu  $\text{Alt}_7$  bzw.  $\text{Alt}_8$ . Ist nun  $Y \in \{A, A_2\}$ , so ist nach (3.3)  $U \cdot Y = U^* \cdot Y \cdot \langle s \rangle$  mit  $U^* \cdot Y \leq VE_2 \cdot Y$ . Mit der Schlußweise, die wir im Beweis von (3.23.a) benutzt haben, folgt nun auch die Behauptung unter (a).

Ist nun  $X \leq M$  mit  $Q = O_2(X) \neq \langle 1 \rangle$  und  $X/Q \cong \text{Alt}_n$  für ein  $n \in \{7, 8\}$ , so liefert eine Inspektion der maximalen Untergruppen von  $M_{24}$ , daß  $X$  in  $M$  zu einer Untergruppe von  $U \cdot E_2 \cdot A_2$  konjugiert ist. Ist speziell  $X = Q \cdot A_2$ , so folgt nach (3.7) sofort  $Q \in I$ .

Ist nun  $X = Q \cdot A$  und  $Q \notin I$ , so folgt nach (3.23) dann  $Q \notin VE_2$ . Da  $q = d_1 q_0 \in A$  ist mit  $o(q) = 7$  und da ferner  $C_{UE_2}(q) = \langle v_1, r_0, s \rangle \cong D_8$  ist, folgt  $C_Q(q) \cap \langle v_1, r_0 \rangle \cdot s \neq \emptyset$ . Wäre nun  $C_Q(q) \neq \langle s \rangle$ , so wäre  $\text{ccl}_A(v_1, r_0)$  in  $Q$  enthalten und somit  $U^* \leq Q$ ; dann folgte aber  $Q \in \{U^*, U, VE_2, UE_2\} \subseteq I$ . Dieser Widerspruch liefert also  $C_Q(q) = \langle s \rangle$ . Da nun in  $Q \cap VE_2$  keine irreduziblen  $A$ -Moduln der Dimension 4 über  $GF(2)$  involviert sein können, erhalten wir  $Q = \langle s \rangle$ .

Die Aussagen unter (c) folgen aus (a) und (b).

Q.E.D.

(3.25) Lemma. Es sei  $W_0 = \langle w_1, w_2 \rangle$  und  $H_2 = C_M(W_0)$ .

Dann gilt folgendes:

(a) Ist  $X$  eine Untergruppe von  $M$  mit  $U \leq X$  und  $X/U \cong L_3(4)$ , so ist  $X$  in  $M$  zu  $H_2$  konjugiert und es ist  $C_U(X) \cong E(2^2)$ .

Die Gruppe  $H_2$  operiert unzerlegbar auf  $U$  und irreduzibel auf  $\bar{U} = U/W_0$ ; ferner operiert  $H_2$  wie folgt auf  $\bar{U}$ :  $(H_2 \# \bar{U}) = 21 \bar{s} + 210 \bar{u}_1 + 280 \bar{u}_1 \bar{s}$ .

(b) Es ist  $(H_2 \# \text{ccl}_H(w_2)) = 1 w_2 + 1 w_1 w_2 + 21 s + 21 w_1 s$  mit  $C_{H_2}(s) \cong E(2^4) \cdot \text{Alt}_5$ .

(c) Ist  $Y$  eine Untergruppe von  $U$  mit  $Y \cap \text{ccl}_j(u_1) = \emptyset$ , so ist  $Y$  in  $M$  zu einer Untergruppe von  $W_0$  konjugiert; insbesondere ist  $|Y| \leq 4$ .

Beweis. Wir wissen, daß  $H_2 = U \cdot N$  mit  $N \cong L_3(4)$  ist. Da  $N$  nicht isomorph zu einer Untergruppe von  $GL_8(2)$  ist und da Elemente der Ordnung 7. aus  $M$  in  $U$  genau eine Vierergruppe zentralisieren, ist dann  $C_U(N) = W_0$  und die Gruppe  $\bar{U} = U/W_0$  ein irreduzibler  $N$ -Modul.

Wir haben bereits in (3.12) gezeigt, daß  $E_2 \cdot K_2$  in  $H_2$  enthalten ist. Die Relationen aus (3.4) liefern  $[U, E_2] = U^*$ , wobei  $W_0 \leq U^*$  ist; somit operiert  $N$  unzerlegbar auf  $U$ .

Wir wissen, daß  $N$  Bahnen der Länge 21, 210 und 280 auf  $\bar{U}$  induziert. Da  $f_0$  ein Element der Ordnung 5. aus  $K_2$  ist mit  $C_U(f_0) = W_0 \langle s \rangle$  und  $W_0 \langle s \rangle \cap ccl_J(u_1) = \{w_1 w_2 s\}$ , folgt für  $x \in sW_0$  nun  $C_N(x \bmod W_0) = C_N(x) \cong E(2^4) \cdot Alt_5$ .

Da  $u_1 W_0 \cap ccl_J(u_1) = \{u_1, u_6, w_1 u_6\}$  ist und da ferner  $u_1 s W_0 \subseteq ccl_J(u_1)$  ist, sind die Elemente  $\bar{s}$ ,  $\bar{u}_1$  und  $\bar{u}_1 \bar{s}$  paarweise nicht unter  $N$  konjugiert. Außerdem ist  $E_2 \langle s_2 t_1 \rangle$  in  $C_N(\bar{u}_1)$  enthalten; damit folgt nun  $|ccl_N(\bar{u}_1)| = 210$  und  $|ccl_N(\bar{u}_1 \bar{s})| = 280$ .

Da es in  $M_{24}$  nur eine Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu  $L_3(4)$  gibt, haben wir (a) bewiesen.

Aus (3.12) wissen wir bereits, daß die Elemente  $x$  aus  $ccl_M(w_1)$  mit  $xw_1 \in ccl_M(w_1)$  genau jene aus  $ccl_{H_1}(w_2)$  sind. Da  $|ccl_{H_1}(w_2)| = 44$  ist, folgt nun offensichtlich aus dem bisherigen Beweis, daß  $H_2$  wie angegeben auf  $ccl_{H_1}(w_2)$  operiert.

Die Aussagen im Teil (c) folgen nun sofort aus den Teilen (a) und (b) sowie der Tatsache, daß  $\langle w_1, w_2, s \rangle$  das Element  $w_1 w_2 s$  aus  $ccl_M(u_1)$  enthält.

(3.26) Lemma. Es sei  $G = C_M(u_1)$ ; wir wissen bereits, daß  $G = O_2(G) \cdot G_0$  ist mit  $O_2(G) = UE = U \cdot R_1$  sowie  $O(G_0) = \langle a_1 \rangle$  und  $G_0 \cong \text{Sym}_6$ . Ferner gilt folgendes:

(a) Es ist  $N_M(\langle a_1 \rangle) = C_U(a_1) \langle a_1, d_2, s_2, t_2, a_3, a_6, t_1 \rangle$  mit  $C_U(a_1) = \langle u_1, u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, s \rangle \cong E(2^5)$ ,  $N_M(\langle a_1 \rangle) = C_U(a_1) \cdot G_0$  und  $\langle a_1, d_2 t_1 \rangle \times \langle d_2, s_2, a_6, t_2 \rangle \cong \text{Sym}_3 \times \text{Sym}_4$ .

(b) Die Gruppe  $G$  operiert auf  $U$  wie folgt:

$$(G \# U) = 1 u_1 + 90 u_2 + 36 w_1 + 240 u_6 + 240 w_2 + 1440 u_6 v_1 r_0.$$

Dabei ist  $C_G(u_6) = C_G(w_2) = UE_2 \cdot \langle a_1, a_3, t_1, s_2 \rangle$  sowie  $C_G(u_6 v_1 r_0) = U \cdot (\langle r_0, t_1 \rangle \times \langle r_0 r_1 d_2, r_0 d_1 t_2, a_3, s_2 \rangle)$  und  $C_G(u_2) = U \cdot R_2 E_1 \cdot \langle a_6, t_2 \rangle$ .

Insbesondere gilt  $u_1 u_2 \sim u_2$  und  $u_1 u_6 v_1 r_0 \sim u_6 v_1 r_0$  in  $G$ ; ferner ist  $u_1 u_6 = w_2$ .

(c)  $G_1 := C_G(u_2)$  operiert auf  $CL := \text{ccl}_G(u_2)$  wie folgt:  $(G_1 \# CL) = 1 u_2 + 1 u_1 u_2 + 4 u_4 + 12 u_3 + 24 u_5 + 48 u_5 v_1 r_0$ ; dabei ist  $u_2 u_5 \notin \text{ccl}_G(w_1)$ .

(d) Es sei  $X$  eine Untergruppe von  $U$  mit  $X \leq U \cap E$ ,  $X \cap \text{ccl}_G(w_1) = \emptyset$  und  $\langle u_1 \rangle \leq X$ ; dann ist  $X$  in  $G$  zu einer der folgenden Gruppen konjugiert:  $\langle u_1 \rangle$ ;  $\langle u_1, u_2 \rangle$ ;  $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ,  $\langle u_1, u_2, u_4 \rangle$ ,  $\langle u_1, u_2, u_5 v_1 r_0 \rangle$ ;  $\langle u_1, u_2, u_3, u_4 v_1 r_0 \rangle$ ,  $\langle u_1, u_2, u_4, u_5 v_1 r_0 \rangle$ ,  $\langle u_1, u_2, u_5 v_1 r_0, u_3 u_5 v_2 r_2 \rangle$ ;  $\langle u_1, u_2, u_4, u_3 u_5 v_1 r_0, u_3 v_2 r_2 \rangle = [U, r_1 r_2]$ .

Beweis. Aus (3.10) wissen wir, daß  $N_J(\langle q_2 \rangle) \geq \langle a_1 \rangle \times K_0$  ist mit  $a_6 \in K_0$ ; außerdem ist  $M \cap K_0 = \langle v_4 t_2, w_2 s, a_6, t_2 \rangle \leq G$ . Aus den Relationen (3.2) - (3.4) berechnen wir nun leicht, daß  $C_{UE}(a_1) = C_U(a_1) = \langle u_1, u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, s \rangle \cong E(2^5)$  ist; ebenso erhalten wir  $G \geq \langle a_1, t_1 \rangle \times \langle d_2, t_2, a_3, s_2 \rangle \cong \text{Sym}_3 \times \text{Sym}_4$  und

$G \cong \langle a_1, d_2 t_1 \rangle \times \langle d_2, s_2, a_6, t_2 \rangle \cong \text{Sym}_3 \times \text{Sym}_4$ . Damit folgen nun offensichtlich die Behauptungen in (a).

Wir stellen nun zunächst einmal fest, daß  $U_e := U \cap E \cong E(2^7)$  ein Normalteiler von  $G$  ist. Aus (3.11) entnehmen wir, daß  $C_G(u_2) = R \cdot \langle d_1, t_1 \rangle \cdot (M \cdot K_0) = UR_2 E_1 \cdot \langle a_6, t_2 \rangle$  ist und daß  $C_G(w_1) = C_H(w_1) \cong E(2^{11}) \cdot E(2^5) \cdot \text{Sym}_5$  ist. Es ist klar, daß  $G$  transitiv auf den Involutionen von  $U/U_e \cong E(2^4)$  operiert. Da  $u_6$  in  $U - U_e$  enthalten ist, gilt dann offensichtlich  $C_G(u_6 \bmod U_e) = UE \cdot Y$  mit  $Y = \langle a_1, t_1 \rangle \times \langle d_2, t_2, a_3, s_2 \rangle$ . Mit den Relationen aus (3.2) - (3.4) berechnen wir nun leicht, daß  $C_G(u_6) = C_G(w_2) = U \cdot C_{R_1}(u_6) \cdot Y = U \cdot \langle r_0, r_2 \rangle \cdot Y$  und außerdem  $C_G(u_6 v_1 r_0) = U \cdot C_{R_1}(u_6 v_1 r_0) \cdot (\langle r_0 r_1 d_2, r_0 d_1 t_2, a_3, s_2 \rangle \times \langle t_1 \rangle)$  mit  $C_{R_1}(u_6 v_1 r_0) = \langle r_0 \rangle$  ist. Damit folgen nun die Aussagen in Teil (b).

Wir setzen nun  $G_1 = C_G(u_2) = UR_2 \langle d_1, t_1 \rangle \cdot \langle a_6, t_2 \rangle$ . Nach (3.6) ist  $I = \{u_3, u_4, u_5, u_5 v_1 r_0\}$  in  $U_e \cap \text{ccl}_J(u_1)$  enthalten. Da  $U_e \leq U_1 \leq R$  ist und Elemente der Ordnung drei aus  $R \cdot K_0$  fixpunktfrei auf  $R - Z(R)$  operieren, ist für  $x \in I$  dann  $C_{G_1}(x)$  eine 2-Gruppe. Wiederum mit den Relationen aus (3.2) - (3.4) berechnen wir die folgenden Zentralisatoren:  $C_{G_1}(u_3) = UE_1 E_2$ ,  $C_{G_1}(u_4) = UR_2 \langle a_6, t_2 \rangle$ ,  $C_{G_1}(u_5) = UE_2 \langle r_3, r_1 d_1 \rangle$  und  $C_{G_1}(u_5 v_1 r_0) = U \cdot \langle r_0, r_1 r_2, r_3, r_1 d_1, d_2 t_1 t_2 \rangle$ . Damit folgen jetzt die Behauptungen in Teil (c).

Da  $\langle w_1, u_2 u_5 \rangle \leq U_e$  ist mit  $\{w_1, u_2 u_5\} \leq \text{ccl}_J(w_1)$  und  $t_1 s_2 r_1: u_2 u_5 \rightarrow w_1 u_2 u_5$ , hat offensichtlich jede Untergruppe von  $U_e$ , welche nur 2-zentrale Involutionen aus  $J$  enthält, höchstens die Ordnung  $2^5$ . Die Behauptung in (d) folgt trivialerweise aus (b) und (c), falls  $|X| \leq 2^3$  ist.

Um den Beweis von (d) abzuschließen, können wir also nun annehmen, daß  $2^4 \leq |X| \leq 2^5$  gilt und daß  $\langle u_1, u_2 \rangle$  in  $X$  enthalten ist. Wir setzen nun  $T_1 = E_1 E_2 R_2$  und beachten, daß  $U \cdot T_1$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $G_1$  ist. Mit (3.2) - (3.4) sehen wir nun leicht, daß  $\text{ccl}_{T_1}(u_4) = \text{ccl}_{G_1}(u_4) = u_4 \langle u_1, u_2 \rangle$ ,  $\text{ccl}_{T_1}(u_3) = u_3 \langle u_1, u_2 \rangle$  und  $\text{ccl}_{T_1}(u_5 v_1 r_0) = u_5 v_1 r_0 \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$  ist. Da außerdem  $a_6 \in G_1$  ist mit  $[\langle a_6 \rangle, \langle u_1, u_2, u_4 \rangle] = \langle 1 \rangle$  und  $a_6: u_3 \rightarrow u_2 u_4 v_1 r_0 \rightarrow u_1 u_2 u_3 u_4 v_1 r_0 \rightarrow u_3$  sowie  $a_6: u_5 v_1 r_0 \rightarrow u_2 u_3 u_4 v_1 r_0 v_2 r_2 \rightarrow u_1 u_3 u_4 u_5 v_2 r_2 \rightarrow u_5 v_1 r_0$ , können wir nun leicht die vollständigen  $G_1$ -Klassen bestimmen. Wir setzen dazu  $W_0 = \langle u_1, u_2 \rangle$  und  $W_1 = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$ ; dann ist  $\text{ccl}_{G_1}(u_3) = u_3 \cdot W_0 \cup u_4 v_1 r_0 \cdot W_0 \cup w_1 v_1 r_0 \cdot W_0$  und  $\text{ccl}_{G_1}(u_5 v_1 r_0) = (u_5 v_1 r_0 \langle u_3 \rangle \cup u_3 v_2 r_2 \langle v_1 r_0 \rangle \cup u_3 u_5 v_2 r_2 \langle u_3 v_1 r_0 \rangle) \cdot W_1$ .

Wir betrachten nun zunächst den Fall, daß  $|X| = 2^4$  ist. Wir beachten, daß  $w_1 \langle u_1, u_2 \rangle \leq \text{ccl}_j(w_1)$  ist und daß außerdem  $t_2: u_4 v_1 r_0 \cdot W_0 \rightarrow w_1 v_1 r_0 \cdot W_0$  gilt. Ist  $X \cap \text{ccl}_{G_1}(u_5 v_1 r_0) = \emptyset$ , so sehen wir nun leicht, daß  $X$  in  $G$  zu  $\langle u_1, u_2, u_3, u_4 v_1 r_0 \rangle$  konjugiert ist; im anderen Falle verifizieren wir ebenso einfach, daß  $X$  in  $G_1$  entweder zu einem Element aus der Menge  $\{ \langle u_1, u_2, u_3, u_5 v_1 r_0 \rangle, \langle u_1, u_2, u_4, u_5 v_1 r_0 \rangle \}$  oder aber zu  $\langle u_1, u_2, u_5 v_1 r_0, v \rangle$  konjugiert ist, wobei  $v \in \text{ccl}_{G_1}(u_5 v_1 r_0)$  ist. Wir nehmen nun also an, daß  $X = \langle u_1, u_2, u_5 v_1 r_0, v \rangle$  ist mit einem Element  $v \in \text{ccl}_{G_1}(u_5 v_1 r_0)$ . Da  $t_1 t_2 \in T_1$  ist mit  $t_1 t_2: W_1 \rightarrow W_1$ ,  $v_1 r_0 \rightarrow u_1 u_3 v_1 r_0$ ,  $u_3 v_2 r_2 \rightarrow u_4 u_5 v_1 r_0 v_2 r_2$ , können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $v \in u_3 v_2 r_2 \langle u_4, v_1 r_0 \rangle$  ist. Wegen  $d_2 \in T_1$  mit  $d_2: u_3 \rightarrow u_3$ ,  $v_1 r_0 \rightarrow u_2 v_1 r_0$ ,  $v_2 r_2 \rightarrow u_4 v_2 r_2$  gilt sogar o.B.d.A.  $v \in u_3 v_2 r_2 \langle v_1 r_0 \rangle$ . Da  $u_3 u_5 v_1 r_0 v_2 r_2$  nicht in  $\text{ccl}_{G_1}(u_5 v_1 r_0)$  enthalten ist, folgt  $v = u_3 v_1 r_0 v_2 r_2$ .

Wir beachten schließlich noch, daß  $a_3 \in G$  ist mit  
 $a_3: u_2 \rightarrow u_1 u_2 u_3 \rightarrow u_1 u_3 \rightarrow u_2$ ,  $u_4 \rightarrow u_5 \rightarrow u_4 u_5 \rightarrow u_4$ ,  $v_1 r_2 \rightarrow v_1 r_0$ ;  
 also gilt  $a_3: \langle u_1, u_2, u_3, u_4 v_1 r_0 \rangle \rightarrow \langle u_1, u_2, u_3, u_5 v_1 r_0 \rangle$ .  
 Damit folgt nun die Behauptung in (d) im Falle  $|X| = 2^4$ .

Es sei also nun  $X \cong E(2^5)$  und  $\langle u_1, u_2 \rangle \leq X$ . Nach (c)  
 ist offensichtlich  $X \cap \text{ccl}_{G_1}(u_5 v_1 r_0) \neq \emptyset$ . Somit können wir  
 o.B.d.A. annehmen, daß  $\langle u_1, u_2, u_5 v_1 r_0 \rangle \leq X$  gilt. Wir haben  
 bereits gesehen, daß  $\langle w_1, u_2 u_5 \rangle^* \leq \text{ccl}_J(w_1)$  ist; insbesondere  
 ist dann also  $X \cap \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle \cong E(2^3)$ . Da  $\text{ccl}_{G_1}(u_3)$   
 in  $\langle u_1, u_2, u_3, u_4, v_1 r_0 \rangle$  enthalten ist, folgt aus dem vorher-  
 gehenden Beweisabschnitt, daß dann o.B.d.A.  $X$  die Gruppe  
 $\langle u_1, u_2, u_5 v_1 r_0, u_3 u_5 v_2 r_2 \rangle$  enthält. Somit existiert also ein  
 Element  $v \in \langle u_3, u_4, u_5 \rangle$  mit  $v \in X$ . Da  $w_1 \langle u_1, u_2 \rangle$  und  
 $u_2 u_5 \cdot \{1, u_4, w_1, u_2 u_3\}$  in  $\text{ccl}_J(w_1)$  enthalten sind, folgt  
 dann o.B.d.A.  $v \in \{u_3, u_4\}$ . Da  $u_5 v_2 r_2$  nicht in  $\text{ccl}_{G_1}(u_5 v_1 r_0)$   
 enthalten ist, erhalten wir schließlich  $v = u_4$ . Also gilt  
 $X = \langle u_1, u_2, u_4, u_5 v_1 r_0, u_3 u_5 v_2 r_2 \rangle$ . Mit Hilfe von (3.4)  
 sehen wir jetzt, daß  $(X)^{t_2} = \langle u_1, u_2, u_4, u_3 u_5 v_1 r_0, u_3 v_2 r_2 \rangle =$   
 $[U, r_1 r_2]$  ist. Damit haben wir die Behauptung in (d) voll-  
 ständig bewiesen.

Q.E.D.

(3.27) Lemma. Es sei  $G = C_H(u_2) = R \cdot \langle d_1, t_1 \rangle \cdot K_0$  und  $Cl = ccl_H(u_2)$ ; dann gilt folgendes:

(a) Die Gruppe  $G$  operiert auf  $Cl$  wie folgt:

$$(G \# Cl) = 1 u_2 + 1 u_1 u_2 + 4 u_4 + 60 u_3 + 120 u_5 + 240 u_5 v_1 r_0 + 320 d_1 + 640 s_1 .$$

Ferner ist  $\{u_2 u_3, u_2 u_4, u_2 u_5 v_1 r_0\} \subseteq Cl$  und  $\{u_2 u_5, u_2 d_1\} \subseteq ccl_J(w_1)$  sowie  $(u_2 s_1)^2 = u_1$ .

(b) Ist  $E(2^3) = X \leq E$  mit  $Z(E) \leq X$  und  $X \cap ccl_J(w_1) = \emptyset$ , so ist  $X$  in  $H$  zu  $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ,  $\langle u_1, u_2, u_4 \rangle$  oder zu  $\langle u_1, u_2, u_5 v_1 r_0 \rangle$  konjugiert.

Beweis. Wir wissen bereits aus (3.11), daß  $|Cl| = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$  und  $G = R \cdot \langle d_1, t_1 \rangle \cdot K_0$  mit  $K_0 = \langle v_4 t_2, w_2 s, a_2, t_2 \rangle \cong \text{Sym}_5$  ist. Wir setzen noch  $Q = O_2(G) = R \cdot \langle d_1, t_1 \rangle$ ; dann ist  $Z(Q) = \langle u_1, u_2 \rangle$  und  $Q' = Z(R) \langle u_3, v_1, r_0, r_1 \rangle$ .

Wir beachten nun, daß Elemente der Ordnung drei oder fünf aus  $G$  fixpunktfrei auf  $R - Z(R)$  operieren. Mit Hilfe der Relationen in (3.2) - (3.4) berechnen wir dann leicht die folgenden Zentralisatoren:  $C_G(u_4) = R \cdot K_0$ ,  $C_G(u_3) = U \cdot E_1 E_2$  und  $C_G(w_1) = U \cdot E_2 \langle r_1, r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$ . Damit folgt also  $(G \# Q') = 1 u_1 + 1 u_2 + 1 u_1 u_2 + 4 u_4 + 60 u_3 + 60 w_1$ .

Wir stellen nun zunächst fest, daß  $u_5 \langle v_1 r_0 \rangle \subseteq Cl \cap R$  ist mit  $u_2 u_5 \in ccl_J(w_1)$  und  $u_2 u_5 v_1 r_0 \in Cl$ ; ferner ist  $\{d_1, s_1\}$  in  $Cl \setminus R$  enthalten mit  $[d_1, u_2] = 1$  und  $[s_1, u_2] = u_1$ . Mit den bereits bekannten Relationen berechnen wir folgende Zentralisatoren:  $C_G(u_5 v_1 r_0) = U \cdot \langle r_0, r_1 r_2, r_3, r_1 d_1, d_2 t_1 t_2 \rangle$  und  $C_G(d_1) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 u_5, v_1, v_2, r_0, r_1, r_2, r_3, d_1, t_1, v_4, a_2, t_2 \rangle$   $C_G(s_1) = \langle u_1, u_4, u_3, u_5, v_1, v_2, r_0, r_1, r_2, r_3, d_1, v_4, a_2, t_2 \rangle$  sowie  $C_G(u_5) = U \cdot E_2 \langle r_3, r_1 d_1 \rangle$ .



Wir können nun sofort sehen, daß  $G$  wie angegeben auf  $C_1$  operiert. Da außerdem  $q_1^2 : u_2 d_1 + u_1 u_2 u_3 v_1 r_0$  gilt und  $ccl_V(v_1 r_0) = v_1 r_0 \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leq ccl_J(w_1)$  ist, folgen nun die Behauptungen in (a) .

Die Aussagen in (b) sind triviale Konsequenzen aus (a) .

Q.E.D.

(3.28) Lemma. Es sei  $X$  eine zu  $Z_4 \times Z_4 \times Z_4$  isomorphe Untergruppe von  $J$  ; ferner enthalte  $X$  ein Element  $v$  der Ordnung vier mit  $v \notin ccl_J(sr_0)$  oder  $v \notin ccl_J(v_2 r_0)$  . Dann ist  $C_J(X) = X \times Z$  oder  $C_J(X) = X * D$  mit  $Z \cong Z_2$  und  $D \cong D_8$  .

Beweis. Wir nehmen zunächst o.B.d.A. an, daß  $v = sr_0$  ist. Wir wissen, daß  $C_J(v) = \langle v \rangle \times U_0 \cdot A^* \cong Z_4 \times E(2^6) \cdot L_3(2)$  mit  $A^* = \langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2, a_3, d_1 q_0 \rangle \cong L_3(2)$  ist. Also gilt  $X = \langle v \rangle \times Y$  mit  $Y \leq U_0 \cdot A^*$  ; offensichtlich ist außerdem  $Y_1 := Y \cap U_0 = \Omega_1(Y)$  und  $Y_1 \cong (Y U_0) / U_0 \cong Y / Y_1 \cong E(2^2)$  sowie  $C_{U_0 A^*}(Y) = C_{U_0}(Y) Y$  .

Wir nehmen nun an, es sei  $U_0 Y = U_0 \cdot \langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1 \rangle$  . Dann ist einerseits  $Y_1 \leq C_{U_0}(r_1 r_3 d_1, r_1 s_1) = \langle u_1, w_1, u_2 u_5 \rangle$  und andererseits  $Y_1 = \langle x, y \rangle$  mit  $x \in [U_0, r_1 r_3 d_1] = \langle u_1, u_2 w_1 \rangle$  und  $y \in [U_0, r_1 s_1] = \langle u_1, u_2 u_4 u_5 \rangle$  ; dies liefert dann den Widerspruch  $E(2^2) \cong Y_1 = \langle x, y \rangle \leq \langle u_1 \rangle$  .

Wir können somit o.B.d.A. annehmen, daß  $U_0 Y = U_0 \cdot \langle r_1 r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$  ist. Dann folgt  $Y_1 \leq C_{U_0}(r_1 r_3 d_1, t_1 s_2) = \langle u_1, u_2, w_1 \rangle$  . Wegen  $[U_0, r_1 r_3 d_1] = \langle u_1, u_2 w_1 \rangle$  und  $[U_0, t_1 s_2] = \langle u_2, u_1 w_1 \rangle$  folgt dann schließlich  $C_J(X) = X \times \langle w_1 \rangle$  .

Wir können nun o.B.d.A. annehmen, daß  $X \cap \text{ccl}_J(\text{sr}_0) = \emptyset$  und  $v = v_2 r_0$  ist; insbesondere liegen dann alle Involutionen aus  $X$  in  $\text{ccl}_J(u_1)$ . Ferner ist  $X = \langle v \rangle \times Y$  mit  $Y \cong Z_4 \times Z_4$  sowie  $v^2 = u_1$ . Außerdem gilt  $C_J(v) = C_H(v) = [(\langle v \rangle * X_0) \cdot X_1] \langle y_1 \rangle$ , wobei  $X_0, X_1$  und  $y_1$  wie in (3.13) definiert sind. Da nun  $Y \cong X/\langle v \rangle \leq C_H(v)/\langle v \rangle \cong E(2^{10}) \backslash \text{PGL}_2(11)$  ist, folgt also  $Y_0 := \Omega_1(Y) \leq X_0$  und  $C_E(v)Y/C_E(v) \cong E(2^2)$ . Offensichtlich ist dann auch  $C_J(X) = C_E(X) \times X$ .

Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $C_E(v)Y = C_E(v) \cdot \langle w_2, s_2 \rangle$  ist. Dann können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $Y = \langle e_1 w_2, e_2 s_2 \rangle$  ist mit geeigneten Elementen  $e_1$  und  $e_2$  aus  $X_0$ . Da in  $J$  nun  $w_2 \nmid u_1 w_2$  und  $s_2 \nmid u_1 s_2$  gilt, folgt somit also  $C_E(e_1 w_2) = C_E(e_1, w_2) \leq C_E(w_2) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1 r_0, v_2 r_2, r_0, r_2 \rangle$  und  $C_E(e_2 s_2) \leq C_E(s_2) = \langle u_1, u_2, u_4, v_1, v_2, r_0, r_2, r_1, r_3 \rangle$ . Somit gilt  $\Omega_1(X) \leq C_E(X) \leq C_E(v, w_2, s_2) = \langle v, u_2, u_4 \rangle * \langle v_1, r_2 \rangle$ . Nun ist auch  $1 \neq (e_1 w_2)^2 = (e_1)^2 [e_1, w_2]$  mit  $(e_1)^2 \in \langle u_1 \rangle$  und  $1 \neq (e_2 s_2)^2 = (e_2)^2 [e_2, s_2]$  mit  $(e_2)^2 \in \langle u_1 \rangle$  sowie  $[e_1, w_2] \in [E, w_2] \cap C_E(X) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle \cap C_E(X) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$  und  $[e_2, s_2] \in [E, s_2] \cap C_E(X) = \langle u_1, u_2, u_4, r_1, r_3 \rangle \cap C_E(X) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$ . Damit folgt nun  $\Omega_1(X) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$ . Insbesondere gilt dann  $C_J(X) \leq X * \langle v_1, r_2 \rangle$ , wobei  $\langle v_1, r_2 \rangle \cong D_8$  ist.

Nun sei schließlich o.B.d.A.  $C_E(v)Y = C_E(v) \langle w_2, y_1 \rangle$ . Wir beachten, daß  $y_1 = a_1 r_2 s s_2 t_1$  mit  $(y_1)^2 = u_1 v_1 r_0 v_2 r_2$  und  $[w_2, y_1] = 1$  ist. Wie oben sei  $Y = \langle e_2 w_2, e_1 y_1 \rangle$  mit geeigneten  $e_i$  aus  $X_0$ ; wie oben erhalten wir nun durch einfache Rechnung  $C_E(v, e_2 w_2) = C_E(v, e_2, w_2) \leq C_E(v, w_2) = \langle v, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, r_2 \rangle$ . Nun ist  $C_E(X) \leq \{x \in C_E(v, e_2 w_2) \mid [x, y_1] \in \langle u_1 \rangle\}$ ; wir berechnen jetzt mittels wohlbekannter Relationen diese Menge. Dazu genügt es, die Operation von  $y_1$  auf bestimmten Elementen aus  $E$  zu

kennen. Wir verifizieren also die folgende Konjugation :

$$y_1 : v \rightarrow v, u_2 \rightarrow u_4, u_3 \rightarrow u_1 u_5, u_4 \rightarrow u_2, u_5 \rightarrow u_1 u_3, \\ v_1 \rightarrow u_1 r_2, r_2 \rightarrow v_1, v_1 r_2 \rightarrow v_1 r_2.$$

Daraus folgt dann  $C_E(X) \leq \langle v, u_2 u_4, u_3 u_5, v_1 r_0 v_2 r_2 \rangle \cong Z_4 \times E(2^3)$ .

Da  $u_3 u_5 \in \text{ccl}_J(w_1)$  ist, erhalten wir schließlich auch in diesem Falle, daß  $C_J(X) \leq X \cdot \langle u_3 u_5 \rangle$  ist. Insbesondere gilt die Behauptung des Lemmas.

Q.E.D.

(3.29) Lemma. In  $J$  gibt es keine Untergruppen der Gestalt  $X \times Y$  mit  $X \cong Z_4 \times Z_4 \times Z_4$  und  $|Y| = 4$ .

Beweis. Wir nehmen an, daß  $X = X_0 \times X_1$  eine Untergruppe von  $J$  ist mit  $X_0 \cong Z_4 \times Z_4 \times Z_4$  und  $|X_1| = 4$ . Nach (3.28) wissen wir bereits, daß  $X \cap \text{ccl}_J(sr_0) = X \cap \text{ccl}_J(v_2 r_0) = \emptyset$  ist. Da  $v := u_6 v_2 r_0$  ein Element aus  $H - E$  ist mit  $v^2 = u_1$  und da es in  $J$  genau drei konjugierten Klassen von Elementen der Ordnung vier gibt, können wir nunmehr o.B.d.A. annehmen, daß  $v \notin X_0$  ist.

Wir wollen nun zunächst eine Sylow 2-Untergruppe  $C_2$  von  $C := C_J(v)$  bestimmen. Wir wissen, daß  $|C| = 2^{15} \cdot 3$  ist; mit den Relationen aus (3.2) - (3.4) berechnen wir jetzt leicht, daß  $E_0 := C_E(v) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, r_2, v_2 r_0 \rangle$  ist und daß  $C_2 = E_0 \langle u_6, v_3 r_1, v_4 d_1, r_3 d_2, s_2, s_1 t_2, f \rangle$  ist, wobei  $f = r_0 s a_1 t_1$  gilt mit  $f^2 = v$ .

Wir setzen nun  $I_1 = \langle u_6, v_3, v_4 \rangle \cdot \langle d_2, s_2, t_2 \rangle$ . Da  $I_1$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $\langle u_6, v_3, v_4 \rangle \cdot L_1 \cong \text{Hol}(E(2^3))$  ist, ist  $I_1$  also eine 2-Gruppe vom Typ  $\text{Alt}_8$ .

Es gilt nun  $EC_2 = E \cdot T_1 \cdot \langle j \rangle$ , wobei  $j = sa_1 t_1 s_2$  eine Involution ist mit  $T_0 := \langle T_1 \rangle$ ,  $j = (\langle u_1 \rangle \times T_1) \cdot \langle j \rangle$ . Schließlich setzen wir noch  $\bar{T}_0 = T_0 / \langle u_1 \rangle$ .

Offensichtlich ist  $F_0 = \langle u_6, v_3, d_2, s_2 \rangle$  die einzige  $E(2^4)$ -Untergruppe von  $T_1$ ; außerdem gibt es in  $T_1$  noch genau fünf  $E(2^3)$ -Untergruppen  $F_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ), welche nicht in  $F_0$  enthalten sind. Für diese Gruppen verifizieren wir leicht die Aussagen der folgenden Tabelle:

| $F_i$                                         | $C_{\bar{T}_0}(\bar{F}_i)$                                              |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $F_0 = \langle u_6, v_3, d_2, s_2 \rangle$    | $\bar{F}_0$                                                             |
| $F_1 = \langle u_6, v_3, v_4 \rangle$         | $\bar{F}_1$                                                             |
| $F_2 = \langle u_6, d_2, t_2 \rangle$         | $\bar{F}_2$                                                             |
| $F_3 = \langle u_6, v_3 d_2, v_4 t_2 \rangle$ | $\bar{F}_3 \langle \overline{sa_1 t_1} \rangle \cong Z_4 \times E(2^3)$ |
| $F_4 = \langle u_6, v_4, t_2 \rangle$         | $\bar{F}_4$                                                             |
| $F_5 = \langle u_6, v_3 v_4, d_2 t_2 \rangle$ | $\bar{F}_5$                                                             |

Ferner gilt  $j : F_1 \rightarrow F_2, F_4 \rightarrow F_5, F_3 \rightarrow F_3$  sowie  $C_{T_0}(F_3) = \langle sa_1 t_1 \rangle \times F_3 \cong Z_4 \times E(2^3)$  und  $C_{T_0}(F_i) = \langle u_1 \rangle \times F_i$  für  $i \in \{0, 1, 2, 4, 5\}$ ; dabei ist  $(sa_1 t_1)^2 = w_2$ .

Wir können nunmehr also o.B.d.A. annehmen, daß  $X \leq C_2$  ist. Da  $X \cap ccl_j(v_2 r_0) = \emptyset$  ist, folgt offensichtlich dann sogleich, daß  $\langle u_1 \rangle \leq X \cap E \leq \Omega_1(X)$  ist.

Wir wollen zunächst den Fall ausschließen, daß  $X/(X \cap E)$  eine Untergruppe isomorph zu  $E(2^4)$  enthält und nehmen daher das Gegenteil an. Dann ist  $EC_2/E \cong EX/E \cong X/(X \cap E) \cong E(2^4)$ . Nach der obigen Vorbemerkung ist nun klar, daß  $EX = EF_0$  ist. Da aber  $X \leq C_2$  gilt, folgt dann  $E_0 X = E_0 \langle u_6, r_1 v_3, r_3 d_2, s_2 \rangle$

und  $E \cap X = E_0 \cap X \cong X/(E_0 \cap X) \cong E(2^4)$ . In  $J$  liegt nun folgende Fusion vor:  $u_1 \sim u_6 \nmid w_2 = u_1 u_6$  und  $u_1 \sim s_2 \nmid u_1 s_2$ ; damit folgt dann  $X \cap E \leq C_{E_0}(u_6, s_2) = \langle u_1, u_2, u_4, v_1, r_2, v_2 r_0 \rangle$ . Also gilt  $X \cap E \leq (\langle v_2 r_0 \rangle + \langle v_1, r_2 \rangle) \times \langle u_2, u_4 \rangle$ . Da also  $X \cap E \cong E(2^4)$  ist, folgt nun  $X \cap E = \langle u_1, u_2, u_4, w \rangle$  mit  $w \in \{v_1, r_2, v_1 r_0 v_2 r_2\}$ . Da aber nun einerseits  $[v_1, r_3 d_2] = u_2$ ,  $[r_2, r_1 v_3] = u_4$  und  $[v_1 r_0 v_2 r_2, r_3 d_2] = u_2 u_4$  ist und andererseits  $X \cap E \leq \{x \in E \mid [g, x] \in \langle u_1 \rangle \text{ für } g \in E_0 X - E_0\}$  ist, haben wir einen Widerspruch hergeleitet.

Also gibt es in  $X/(X \cap E)$  keine Untergruppe isomorph zu  $E(2^4)$ . Insbesondere ist dann auch  $X_1 \cong E(2^2)$ . Außerdem liegt dann offensichtlich einer der folgenden drei Fälle vor:

(F1)  $X \cap E \cong E(2^5)$  und  $X/(X \cap E) \cong E(2^3)$  ;

(F2)  $X \cap E \cong E(2^4)$  und  $X/(X \cap E) \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_4$  ;

(F3)  $X \cap E \cong E(2^3)$  und  $X/(X \cap E) \cong Z_2 \times Z_4 \times Z_4$  .

Wir berechnen nun leicht, daß es in  $T_1$  genau sechs Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung vier gibt und daß diese Klassen durch  $v_4 s_2, t_2 s_2, v_4 d_2, v_3 t_2, v_4 t_2 s_2, v_4 t_2 v_3$  repräsentiert werden.

Wir setzen nun  $x_1 = j d_2$  und  $x_2 = j d_2 s_2$ . Dann gilt  $(x_1)^2 = v_3 d_2$  und  $(x_2)^2 = u_1 u_6 v_3 d_2$ ; ferner ist  $[v_4 t_2 v_3, x_1] = 1$  und  $[v_4 t_2 s_2, x_2] = u_1$  sowie  $s a_1 t_1 v_3: v_4 s_2 \rightarrow u_1 t_2 s_2, v_4 d_2 \rightarrow v_3 t_2$ . Damit sehen wir nun, daß es in  $\bar{T}_1$  genau vier  $\bar{T}_0$ -Klassen von Elementen der Ordnung vier gibt; Repräsentanten und die entsprechenden Zentralisatoren sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

| Repr. $\bar{x}$                 | $C_{\bar{T}_0}(\bar{x})$                                                                                                               |
|---------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\bar{v}_4 \bar{s}_2$           | $\langle \bar{u}_6 \rangle \times \langle \bar{v}_4 \bar{s}_2 \rangle \approx Z_2 \times Z_4$                                          |
| $\bar{v}_4 \bar{d}_2$           | $\langle \bar{v}_3, \bar{t}_2 \rangle * \langle \bar{v}_4 \bar{d}_2 \rangle \approx D_8 * Z_4$                                         |
| $\bar{v}_4 \bar{t}_2 \bar{s}_2$ | $\langle \bar{x}_2 \rangle \times \langle \bar{v}_4 \bar{t}_2 \bar{s}_2 \rangle \approx Z_4 \times Z_4$                                |
| $\bar{v}_4 \bar{t}_2 \bar{v}_3$ | $(\langle \bar{x}_1 \rangle \times \langle \bar{v}_4 \bar{t}_2 \bar{v}_3 \rangle) \cdot \langle \bar{v}_4 \rangle \approx Z_4 \wr Z_2$ |

Wir wollen jetzt zeigen, daß der Fall (F1) vorliegt und nehmen daher das Gegenteil an. Da  $X/(X \cap E) \approx EX/E$  ist und  $EX/E \leq EC_2/E \approx \bar{T}_0$  sowie  $T_1 \approx \bar{T}_1$  eine maximale Untergruppe von  $\bar{T}_0$  ist, muß dann der Fall (F2) auftreten und außerdem  $(EX \cap ET_1)/E \approx E(2^3)$  sein.

Es sei also  $X_m$  eine maximale Untergruppe von  $X$  derart, daß  $EX_m = EX \cap ET_1$  gilt; dann ist  $E \cap X = E \cap X_m \approx E(2^4)$  und  $X_m/(E \cap X) \approx E(2^3)$ .

Wir nehmen nun an, daß  $EX_m$  nicht in  $EF_0$  enthalten ist. Da  $C_{\bar{T}_0}(\bar{F}_i) = \bar{F}_i$  ist für  $i \in \{1, 2, 4, 5\}$ , folgt  $EX_m = EF_3$ . Nun ist  $C_{\bar{T}_0}(\bar{F}_3) = \bar{F}_3 \langle \bar{s}_1 \bar{t}_1 \rangle \approx Z_4 \times Z_2 \times Z_2$  und  $X \leq C_2$ ; damit folgt dann  $E_0 X_m = E_0 \langle u_6, r_1 r_3 v_3 d_2, s_1 d_1 v_4 t_2 \rangle$  und außerdem auch  $E_0 X = E_0 X_m \langle f \rangle$ . Es sei nun  $\bar{C}_2 = C_2/E_0$ ; dann folgt sofort, daß  $\bar{X} = \langle \bar{f}, \bar{r}_1 \bar{r}_3 \bar{v}_3 \bar{d}_2, \bar{s}_1 \bar{d}_1 \bar{v}_4 \bar{t}_2 \rangle \approx Z_4 \times Z_2 \times Z_2$  mit  $(\bar{f})^2 = \bar{v} = \bar{u}_6$  ist. Wir haben einen Widerspruch hergeleitet, da  $v \in X$  ist mit  $o(v) = 4$  und somit  $\bar{v}$  keine Quadratwurzel in  $\bar{X}$  hat.

Es folgt also, daß  $EX_m = E \cdot F$  ist mit  $E(2^3) \approx F \leq F_0$ . Wir betrachten nun noch einmal  $\bar{T}_0$ . Es ist  $\bar{T}_0 \approx \bar{F}_0 \langle \bar{v}_4, \bar{t}_2, \bar{j} \rangle$  mit  $\bar{T}_0/\bar{F}_0 \approx D_8$  sowie  $\bar{j} : \bar{v}_4 \rightarrow \bar{d}_2 \bar{t}_2, \bar{t}_2 \rightarrow \bar{v}_3 \bar{v}_4, \bar{v}_4 \bar{t}_2 \rightarrow \bar{u}_6 \bar{v}_3 \bar{d}_2 \bar{v}_4 \bar{t}_2$  und  $(\bar{t}_2 \bar{j})^2 = \bar{u}_6 \bar{v}_3 \bar{v}_4 \bar{t}_2$ ; damit können wir also o.B.d.A. annehmen, daß  $EX \leq EF_0 \langle j \rangle$  ist.

Wir berechnen nun die Operation von  $\bar{J}$  auf  $\bar{F}_0$ ; es ist  $\bar{J} : \bar{u}_6 \rightarrow \bar{u}_6, \bar{v}_3 \rightarrow \bar{d}_2 + \bar{v}_3, \bar{s}_2 \rightarrow \bar{u}_6 \bar{s}_2$ . Daraus folgt sofort, daß  $C_{\bar{F}_0}(\bar{J}) = [\bar{F}_0, \bar{J}] = \langle \bar{u}_6, \bar{v}_3 \bar{d}_2 \rangle$  ist. Insbesondere sehen wir, daß es in  $\bar{F}_0 \langle \bar{J} \rangle$  keine Untergruppen isomorph zu  $Z_4 \times Z_2 \times Z_2$  gibt. Da aber andererseits  $X/(X \cap E) \cong EX/E \cong Z_4 \times Z_2 \times Z_2$  ist, haben wir einen Widerspruch hergeleitet. Wir haben damit nun gezeigt, daß der Fall (F1) vorliegen muß.

Es gilt also  $X_E := X \cap E \cong E(2^5)$  und  $X/X_E \cong E(2^3)$ . Wir setzen nun  $P = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ . Dann ist offensichtlich  $Z(E_0) = \langle v_2 r_0 \rangle \times \langle u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle$  und  $Q = \Omega_1(Z(E_0)) = P \cdot \langle u_5 \rangle$ . Außerdem sehen wir nun leicht, daß  $Q_1 = Q \langle v_1 \rangle, Q_2 = Q \langle r_2 \rangle$  und  $Q_3 = Q \langle v_1 r_0 v_2 r_2 \rangle$  die einzigen maximalen elementar-abelschen Untergruppen von  $E_0$  sind. Da  $C_{C_2}(P) = E_0 \langle u_6, r_1 v_3 \rangle$  ist, folgt dann  $X \cap P = (X \cap E) \cap P < P$ . Also gibt es ein  $i \in \{1, 2, 3\}$  mit  $\langle u_1 \rangle \leq X \cap E \leq Q_i, Q \cap X \cong E(2^2)$  und  $P \cap X \cong E(2^3)$ .

Da  $\{s_2, f\} \leq C_2$  ist mit  $s_2 : u_2 \rightarrow u_2, u_3 \rightarrow u_2 u_3, u_4 \rightarrow u_4$  und  $f : u_2 \rightarrow u_4 + u_2$ , können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $P \cap X \in \{ \langle u_1, u_2, u_4 \rangle, \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \langle u_1, u_2, u_3 u_4 \rangle, \langle u_1, u_3, u_2 u_4 \rangle \}$  ist. Wir berechnen nun die folgenden Zentralisatoren:

$$\begin{aligned} C_{C_2}(u_1, u_2, u_3) &= E_0 \langle u_6, r_1 v_3, d_1 v_4 \rangle, \\ C_{C_2}(u_1, u_2, u_3 u_4) &= E_0 \langle u_6, r_1 v_3, r_1 d_1 d_2 v_4 \rangle, \\ C_{C_2}(u_1, u_3, u_2 u_4) &= E_0 \langle u_6, r_1 v_3, d_1 s_1 t_2 v_4 \rangle \text{ und} \\ C_{C_2}(u_1, u_2, u_4) &= E_0 \langle u_6, r_1 v_3, r_3 d_2, s_2 \rangle. \end{aligned}$$

Wir beachten nun, daß wegen  $[s_2, u_5] = u_4$  dann o.B.d.A.

$Q \cap X = (P \cap X) \langle w u_5 \rangle$  ist mit  $w \in \{u_5, u_3 u_5\}$ . Nun berechnen wir leicht, daß in jedem Falle  $C_{C_2}(Q \cap X)/E_0 \leq E(2^2)$  ist. Dies widerspricht aber  $E_0 X/E_0 \cong X/(X \cap E) \cong E(2^3)$ .

Q.E.D.

(3.30) Lemma. Wir setzen  $\bar{M} = M/U$ ; bekanntlich ist  $\bar{T} = \bar{S}$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $\bar{M}$  mit  $\bar{T} \cong T$ . Es sei nun  $X$  eine elementar-abelsche Untergruppe von  $T$ ; dann gilt folgendes:

(a) Ist  $X \cong E(2^5)$ , so liegt genau einer der beiden folgenden Fälle vor:

- (1)  $X < C_T(X) \in \{R_1, R_2\}$ ;
- (2)  $X = C_T(X) \cong \langle r_0, r_i, t_i, d_j, s_j \rangle$  mit  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ .

(b) Ist  $X \cong E(2^4)$  und enthält  $\bar{X}$  nur 2-zentrale Involutionen aus  $\bar{M}$ , so gilt genau eine der folgenden vier Aussagen:

- (1)  $X = C_T(X) \in \{E_1, E_2\}$ ;
- (2)  $X = C_T(X) \cong \langle r_0, r_1, r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$ ;
- (3)  $X \cong \langle r_0, r_2, r_3 d_1, r_1 r_3 s_1 \rangle$  und  $C_T(X) = R_1$ ;
- (4)  $X \cong \langle r_1, r_3, d_1, s_1 \rangle$  und  $C_T(X) = R_1$ .

Beweis. Es seien  $i, j \in \{1, 2\}$  mit  $i \neq j$ ; ferner sei  $R_0 = R_1 \cap R_2$  und  $D_i = R_0 \cdot \langle d_i \rangle$ . Wir verifizieren nun leicht, daß  $R_0 \cdot d_i = \text{ccl}_T(d_i) \cup \text{ccl}_T(r_j d_i) \cup \text{ccl}_T(r_3 d_i)$  und außerdem  $D_i \cdot s_i = \text{ccl}_T(s_i) \cup \text{ccl}_T(r_0 s_i) \cup \text{ccl}_T(r_i s_i)$  ist. Ferner gilt  $C_T(d_i) = R_i \cdot \langle t_i, t_j \rangle$ ,  $C_T(r_j d_i) = R_i \cdot \langle t_i d_j, t_j \rangle$  sowie  $C_T(r_3 d_i) = R_i \cdot \langle t_i s_j \rangle$ ,  $C_T(s_i) = C_T(r_0 s_i) = R_i \cdot \langle t_j \rangle$  und  $C_T(r_i s_i) = R_i$ .

Wir beachten ferner, daß jede elementar-abelsche Untergruppe von  $R_1 R_2$  in  $R_1$  oder in  $R_2$  enthalten ist. Setzen wir nun  $Y = N_{L_0}(R_i)$  und  $\bar{Y} = Y/R_i$ , so sind offensichtlich  $\bar{d}_j$ ,  $\bar{t}_i$  und  $\bar{d}_j \bar{t}_i$  Repräsentanten der Klassen von Involutionen in  $\bar{Y}$ , wobei  $C_{R_i}(d_j) = R_0$ ,  $C_{R_i}(t_i) = \langle r_0, r_i, d_i \rangle$  und  $C_{R_i}(d_j t_i) = \langle r_0, r_i, r_j d_i \rangle$  ist.



(a) Es sei nun  $E(2^5) \cong X \leq T$ . Ist  $X \leq R_1 R_2$ , so folgt aus der Vorbemerkung sofort die Behauptung unter (1). Wir können also nunmehr o.B.d.A. annehmen, daß  $X$  nicht in  $R_1 R_2$  enthalten ist. Offensichtlich ist  $X_0 := X \cap R_1 R_2 < R_i$  für ein geeignetes  $i \in \{1, 2\}$  und  $E(2^3) \leq X_0$ .

Wir nehmen zunächst an, daß  $X_0 \cong E(2^3)$  ist. Dann gilt  $R_1 R_2 X = T = R_i \cdot \langle d_j, s_j \rangle \cdot \langle t_i, t_j \rangle$ . Da  $[s_j, t_j] = d_j$  ist, folgt sogar  $X \leq R_i \cdot \langle d_j \rangle \cdot \langle t_i, t_j \rangle$ . Wir berechnen nun, daß  $C_{R_i}(t_i) = \langle r_0, r_i, d_i \rangle$  und  $C_{R_i}(d_j t_i) = \langle r_0, r_i, r_j d_i \rangle$  ist. Also ist  $X_0 \in \{ \langle r_0, r_i, d_i \rangle, \langle r_0, r_i, r_j d_i \rangle \}$ . Da aber auch  $C_T(r_0, r_i, d_i) = R_i \cdot \langle t_i \rangle$  und  $C_T(r_0, r_i, r_j d_i) = R_i \cdot \langle d_j t_i \rangle$  ist, erhalten wir nun einen Widerspruch.

Wir haben somit gezeigt, daß  $X_0 \cong E(2^4)$  ist. Wir nehmen nun an, daß  $X_0 \leq D_i$  ist. Da  $T/R_i \cong \langle t_i \rangle \times \langle d_j, s_j, t_j \rangle$  ist und  $X$  nicht in  $R_1 R_2$  enthalten ist, können wir nun o.B.d.A. annehmen, daß  $R_i X = R_i \cdot \langle x \rangle$  ist mit einer Involution  $x$  aus  $\{t_i, t_j, t_i t_j, t_i s_j, t_i d_j\}$ . Da aber in jedem Falle  $C_{D_i}(x) \cong E(2^3)$  gilt, haben wir einen Widerspruch hergeleitet. Somit ist  $X_0$  nicht in  $D_i$  enthalten.

Aus der Vorbemerkung sehen wir jetzt, daß o.B.d.A. dann  $X_0 \cap \{s_i, r_0 s_i\} \neq \emptyset$  ist und daß  $X \leq R_i \cdot \langle t_j \rangle$  gilt. Nun ist offensichtlich  $X_0 = C_{R_i}(t_j) = \langle r_0, r_j, d_i, s_i \rangle$  und damit  $X = X_0 \times \langle t_j \rangle$ . Also gilt die Behauptung in (2).

(b) Wir beachten, daß  $\bar{M} \cong M_{24}$  genau zwei Konjugiertenklassen von Involutionen hat und daß diese durch  $\bar{r}_0$  und  $\bar{r}_1 \bar{r}_2$  repräsentiert werden. Ferner gilt  $C_U(r_0) \cong E(2^7)$  und  $C_U(r_1 r_2) \cong E(2^6)$ . Außerdem sei daran erinnert, daß  $M$  die Gruppe  $E_1 E_2 A_0 \cong \text{Ex}(2^7) \cdot L_3(2)$  enthält, wobei  $T = E_1 E_2 \cdot D$

mit  $D_8 \cong D = \langle r_3, s_1, s_2 \rangle \trianglelefteq A_0 \cong L_3(2)$  ist. Da  $Z(T) = \langle r_0 \rangle$  ist, sind die 2-zentralen Involutionen aus  $\bar{M}$  also alle zu  $\bar{r}_0$  konjugiert und deren Urbilder in  $M$  zentralisieren dann in  $U$  eine Gruppe der Ordnung  $2^7$ .

Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $r_0$  nicht in  $X$  enthalten ist. Dann ist  $X \times \langle r_0 \rangle \cong E(2^5)$ . Da  $|C_U(x)| = 2^6$  ist für  $x \in \{r_1 d_2, r_0 r_1 d_2, r_2 d_1, r_0 r_2 d_1\}$ , folgt mit (a) nun, daß  $X \leq R_i$  ist für ein geeignetes  $i \in \{1, 2\}$ . Wir wissen, daß  $q_2$  ein Element der Ordnung 7 aus  $M$  ist, welches  $R_2$  normalisiert; da  $\langle \text{ccl}_{\langle q_2 \rangle}(r_1 r_2) \rangle = \langle r_1 r_2, r_3 d_2, r_0 d_2 s_2 \rangle \cong E(2^3)$  ist, folgt dann  $X \leq R_1$ .

Da  $a_1 \in M$  ist mit  $a_1: r_1 r_2 \rightarrow r_0 r_1 r_3 \rightarrow r_0 r_2 r_3 \rightarrow r_1 r_2$ , ist dann  $X \cap R_0 \cong E(2^2)$  und  $R_0 X = R_1$ ; ferner können wir annehmen, daß  $X \cap R_0 = \langle x_0, x_1 \rangle$  ist mit  $x_i \in r_i \langle r_1 r_2, r_0 r_1 r_3 \rangle$  für  $i \in \{0, 1\}$ . Da  $x_0$  und  $x_1$  2-zentrale Involutionen in  $\bar{M}$  induzieren, erhalten wir zunächst  $x_1 \in \{r_1, r_2, r_0 r_1 r_2 r_3\}$  und  $x_0 \in \{r_1 r_3, r_2 r_3\}$ ; da nun auch noch  $C_U(x_0 x_1) \cong E(2^7)$  gelten muß, ist  $\langle x_0, x_1 \rangle$  dann ein Element aus der Menge  $\{\langle r_1, r_3 \rangle, \langle r_2, r_3 \rangle, \langle r_0 r_2, r_1 r_3 \rangle, \langle r_0 r_1, r_2 r_3 \rangle\}$ . Da  $t_1, t_2 \in T$  mit  $t_1: \langle r_0 r_2, r_1 r_3 \rangle \rightarrow \langle r_2, r_3 \rangle$  und  $t_2: \langle r_0 r_1, r_2 r_3 \rangle \rightarrow \langle r_1, r_3 \rangle$ , können wir dann also o.B.d.A. annehmen, daß  $X \cap R_0 = \langle x_0, x_1 \rangle \in \{\langle r_1, r_3 \rangle, \langle r_2, r_3 \rangle\}$  ist.

Nun sei  $y \in R_0$  mit  $y d_1 \in X$ . Wir beachten, daß  $R_0 \cdot d_1 = \langle r_0, r_1 \rangle \cdot d_1 \cup \langle r_0, r_1 \rangle \cdot r_2 d_1 \cup \langle r_0, r_1, r_2 \rangle \cdot r_3 d_1$  ist mit  $r_2 d_1 \stackrel{M}{\sim} r_1 r_2$  und  $[T, d_1] = \langle r_0, r_1 \rangle$  und  $[T, r_3 d_1] = \langle r_0, r_1, r_2 \rangle$ . Nun folgt  $X \cap R_0 = \langle r_1, r_3 \rangle$  und o.B.d.A.  $y \in \langle r_0 \rangle$ . Da aber  $d_2 \in T$  ist mit  $d_2: r_1 \rightarrow r_1, r_3 \rightarrow r_3, d_1 \rightarrow r_0 d_1$ , können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $y = 1$  ist. Wir haben bisher also gezeigt, daß  $\langle r_1, r_3, d_1 \rangle \leq X$  ist.

Wir beachten nun, daß  $\langle r_2, r_3 \rangle \cdot r_0 s_1 \subseteq \text{cccl}_M(r_1 r_2)$  ist; somit können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $X = \langle r_1, r_3, d_1, y s_1 \rangle$  mit  $y \in \langle r_2 \rangle$  ist. Da  $a_1 a_3 a_1 t_1: r_2 d_1 s_1 \rightarrow r_1 r_2$  gilt, folgt dann  $y = 1$  und  $X = \langle r_1, r_3, d_1, s_1 \rangle$ . Einfache Rechnungen zeigen schließlich noch, daß  $C_I(X) = R_1$  ist.

Im folgenden können wir also nun stets annehmen, daß  $r_0$  in  $X$  enthalten ist. Wir setzen nun  $X_0 = X \cap E_1 E_2$ . Da  $\bar{E}_i$  nur 2-zentrale Involutionen aus  $\bar{M}$  enthält und da  $C_I(E_i) = E_i$  ist, nehmen wir ferner o.B.d.A. an, daß  $X$  nicht in  $\{E_1, E_2\}$  enthalten ist. Wir müssen nun also nachweisen, daß Fall (2) oder Fall (3) auftritt.

Wir wollen jetzt zeigen, daß  $X_0 \leq E_i$  für ein geeignetes  $i \in \{1, 2\}$  gilt und nehmen daher an, daß  $X_0$  nicht in  $E_2$  enthalten ist. Da  $I/(E_1 E_2) \cong D \cong D_8$  ist, folgt  $E(2^2) \cong X_0$ . Also existiert ein Element  $e$  in  $X_0 - \langle r_0 \rangle$ . Offensichtlich hat  $e$   $A_0$ -Konjugierte in  $r_1 \cdot E_2$ . Da  $\{x \in r_1 E_2 \mid x^2 = 1\} = r_1 \cdot C_{E_2}(r_1) = r_1 \langle r_0, r_2, d_2 \rangle$  ist und da  $C_{A_0}(r_1) \cong \text{Sym}_4$  transitiv auf  $\langle r_2, d_2 \rangle^*$  operiert, hat  $e$  dann  $A_0$ -Konjugierte in  $r_1 \cdot \langle r_0, r_2 \rangle$ . Da  $r_0 r_1 r_2 \sim_7 r_1 r_2$  gilt, hat  $e$  somit nur  $A_0$ -Konjugierte in  $r_1 \cdot \langle r_0 \rangle$ . Da  $\langle r_0, r_1 \rangle \leq E_1$  ist und da  $A_0 \leq N_M(E_1)$  ist, folgt dann  $X_0 \leq E_1$ . Damit gilt also dann  $X_0 \leq E_i$  mit einem geeigneten  $i \in \{1, 2\}$ .

Ist  $X_0 \cong E(2^3)$ , so ist  $E_1 E_2 X$  in  $A_0$  zu  $E_1 E_2 \cdot \langle r_3 \rangle$  konjugiert; wir nehmen dann o.B.d.A. an, daß  $X \leq E_1 E_2 \langle r_3 \rangle$  ist. Dann existiert ein  $e \in E_1 E_2$  mit  $er_3 \in X$ . Nun gilt  $r_3: t_1 \rightarrow r_1 t_1, t_2 \rightarrow r_2 t_2, t_1 t_2 \rightarrow r_0 r_1 r_2 t_1 t_1$ ; damit berechnen wir nun leicht, daß o.B.d.A.  $e$  ein Element aus  $\langle r_1, r_2, d_1 \rangle \cup \langle r_1, r_2 \rangle \cdot d_2$  ist. Da wir ferner o.B.d.A. mit Elementen aus  $\langle t_1, t_2 \rangle$  konjugieren können, dürfen wir dann

annehmen, daß  $e \in \{1, d_1, d_2\}$  ist. Da  $q_2$  und  $a_1 t_1$  Elemente aus  $M$  sind mit  $q_2: r_1 r_2 \rightarrow r_3 d_2$  und  $a_1 t_1: r_0 r_3 \rightarrow r_1 r_2$ , folgt schließlich  $e = d_1$ ; also ist  $r_3 d_1 \in X$ . Nun ist aber  $C_{E_2}(r_3 d_1) = \langle r_0, r_2 \rangle$ . Damit folgt  $X_0 = C_{E_1}(r_3 d_1) = \langle r_0, r_1, d_1 \rangle$  und  $X = \langle r_0, r_1, r_3, d_1 \rangle$ . Da  $r_0 r_3 \in \text{ccl}_M(r_1 r_2)$  ist, haben wir einen Widerspruch erhalten. Wir haben somit gezeigt, daß  $X_0 \approx E(2^2)$  ist.

Nun ist klar, daß  $E_1 E_2 X = E_1 E_2 \cdot \langle r_3, s_j \rangle$  ist mit einem geeigneten  $j \in \{1, 2\}$ ; insbesondere ist  $X \cap E_1 E_2 \cdot r_3 \neq \emptyset$ . Ebenso wie im vorherigen Abschnitt folgt nun, daß dann o.B.d.A.  $\langle r_0, r_3 d_1 \rangle \leq X$  ist.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß  $X_0 \leq E_2$  ist. Dann ist offensichtlich  $X_0 = C_{E_2}(r_3 d_1) = \langle r_0, r_2 \rangle$  und ferner  $X \leq C_T(r_2, r_3 d_1) = R_1$ . Da  $X \cap E_1 E_2 = X \cap E_2 = \langle r_0, r_2 \rangle$  und  $X \cap E_1 = \langle r_0 \rangle$  ist, folgt  $X = \langle r_0, r_2, r_3 d_1, x \rangle$  mit einem  $x \in \langle r_1, r_3 \rangle \cdot s_1$ . Da  $r_0 s_1 \in \text{ccl}_M(r_1 r_2)$  ist und da  $t_1: r_0 r_3 s_1 \rightarrow r_0 r_3 d_1 r_1 s_1$  sowie  $s_2: r_0 s_1 \rightarrow r_0 r_3 s_1$  gilt, folgt  $x = r_1 r_3 s_1$  und damit  $X = \langle r_0, r_2, r_3 d_1, r_1 r_3 s_1 \rangle$ . Offensichtlich gilt außerdem  $C_T(X) = R_1$ .

Schließlich betrachten wir noch den Fall, daß  $X_0 \leq E_1$  ist. Falls  $X_0 \cap \langle r_1 \rangle \cdot d_1 \neq \emptyset$  ist, dann ist ebenfalls auch  $X \cap \langle r_1 \rangle \cdot r_0 r_3 \neq \emptyset$ ; da  $t_1: r_0 r_3 \rightarrow r_0 r_1 r_3$  und außerdem  $s_1^2: r_0 r_1 r_3 \rightarrow r_1 r_2$  gilt, erhalten wir einen Widerspruch. Also gilt  $X_0 = \langle r_0, r_1 \rangle$  und  $X \leq C_T(r_1, r_3 d_1) = R_1 \cdot \langle t_1 s_2 \rangle$ . Im Falle  $X \leq R_1$  erhalten wir wegen  $\langle d_2, s_2 \rangle \leq I$  dann o.B.d.A.  $X = \langle r_0, r_1, r_3 d_1, s_1 \rangle$ ; dies ist ein Widerspruch, da  $r_0 s_1 \in \text{ccl}_M(r_1 r_2)$  ist. Damit folgt dann schließlich  $X = C_{R_1}(t_1 s_2) \times \langle t_1 s_2 \rangle = \langle r_0, r_1, r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$  und dann auch  $C_T(X) = X$ .

Wir haben bisher nachgewiesen, daß jede mögliche elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung 16 in  $\bar{T}$ , welche nur 2-zentrale Involutionen von  $\bar{M}$  enthält, eine der Aussagen (1) - (4) erfüllt.

Abschließend vermerken wir noch, daß umgekehrt jede der unter (1) - (4) aufgeführten  $E(2^4)$ -Untergruppen von  $T$  nur Involutionen enthält, deren Bilder in  $\bar{M}$  2-zentral sind.

Q.E.D.

(3.31) Lemma. Es sei  $X$  eine 2-Untergruppe von  $J$ ; dann gilt folgendes:

- (a) Ist  $X \cap \text{ccl}_J(u_1) = \emptyset$ , so ist  $|X| \leq 2^{10}$ .
- (b) Ist  $X \cap \text{ccl}_J(w_1) = \emptyset$ , so ist  $|X| \leq 2^{12}$ .

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß  $X$  eine 2-Untergruppe von  $J$  ist mit  $X \cap \text{ccl}_J(u_1) = \emptyset$ . Dann können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $\langle w_1 \rangle \leq Z(X)$  und somit insbesondere  $X \leq H_1$  ist. Da  $H_1/U \cong \text{Aut}(M_{22})$  ist und nach (3.25) außerdem  $|X \cap U| \leq 4$  ist, folgt offensichtlich  $|X| \leq 2^{10}$  und damit die Behauptung in (a).

Im folgenden sei  $X$  eine 2-Untergruppe von  $J$  mit  $X \cap \text{ccl}_J(w_1) = \emptyset$ . Wir nehmen ferner an, daß  $2^{13} \leq |X|$  ist. Da  $|J|_2 = 2^{21}$  und  $L = N_J(V)$  mit  $|L|_2 = 2^{20}$  ist, können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $Y := X \cap L$  mindestens die Ordnung  $2^{12}$  hat. Wir setzen nun  $Y_0 = V \cap Y$ ; offensichtlich ist  $E(2^2) \leq Y_0 \leq Y$ .

Wir setzen  $W_1 = \langle u_1 \rangle$ ,  $W_2 = \langle u_1, u_2 \rangle$ ,  $W_3 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$   
sowie  $W_4 = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$  und  $W_5 = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 \rangle$ .  
Nach (3.1) gilt  $(L \# V) = 155 u_1 + 868 w_1$ ; ferner ist  
 $C_1 := C_L(u_1) = V \cdot R_1 \cdot (L_1 \times \langle a_1, t_1 \rangle)$ . In  $[L; II, 1.3]$  wurde  
außerdem gezeigt, daß  $(C_1 \# ccl_L(u_1)) = 1 u_1 + 42 u_2 + 112 u_6$   
ist mit  $u_1 u_6 = w_2 \in ccl_J(w_1)$ . Wir beachten, daß  $V \cdot T$  eine  
Sylow 2-Untergruppe sowohl von  $L$  als auch von  $C_1$  ist; aus  
(3.2) und (3.6) entnehmen wir nun leicht, wie  $V \cdot T$  auf der  
Menge  $ccl_{C_1}(u_2)$  operiert. Es ist  $(VT \# ccl_{C_1}(u_2)) = 2 u_2 +$   
 $4 u_3 + 4 u_4 + 8 u_5 + 8 v_1 + 16 v_2$ ; dabei gilt  
 $ccl_T(u_2) = u_2 \cdot W_1$ ,  $ccl_T(u_3) = u_3 \cdot W_2$ ,  $ccl_T(u_4) = u_4 \cdot W_2$  und  
 $ccl_T(v_1) = v_1 \cdot W_3$ . Außerdem ist  $u_2 u_5 \cdot W_1 \subseteq ccl_J(w_1)$  und  
 $u_3 u_4 \cdot W_2 = w_1 \cdot W_2 = ccl_T(w_1)$  sowie  $a_2 \in C_L(u_1, u_2)$  mit  
 $a_2: v_1 \rightarrow u_1 u_3$ ,  $v_2 \rightarrow u_4 u_5$  und  $s_2 \in T$  mit  $s_2: u_2 u_4 u_5 \rightarrow u_2 u_5$ .  
Da  $ccl_T(u_4 v_1) = u_4 v_1 \cdot W_3 = ccl_T(w_4) \subseteq ccl_J(w_1)$  ist, sehen  
wir nun leicht, daß o.B.d.A.  $Y_0 = W_j$  ist mit einem Element  
 $j$  aus  $\{2, 3, 4, 5\}$ . In jedem Falle wird  $Y_0$  dann von  $T$   
normalisiert; da  $Y \leq N_L(Y_0)$  ist, können wir also o.B.d.A.  
folgendes annehmen:

- (1) Es ist  $Y_0 \in \{W_2, W_3, W_4, W_5\}$  und  $Y \leq VT$ ; ferner  
gibt es ein  $T_0 \leq T$  mit  $VY = V \cdot T_0$ .

Da  $|Y_0| \leq 2^4$  ist, folgt wegen  $T = \langle r_0 \rangle$  dann sogleich  
auch folgendes:

- (2) Es gibt ein  $x_0 \in V$  mit  $x_0 r_0 \in Y$ . Ist  $t \in T_0$  und  
 $v \in V$  mit  $vt \in Y$ , so ist  $[x_0, t] \cdot [v, r_0] \in Y_0$ .

Da  $|T_0| \geq 2^6$  ist, folgt  $|T_0 \cap E_1 E_2| \geq 2^5$ ; da aber  
 $E_1 E_2 \cong \text{Ex}(2^7)$  ist, gibt es dann in  $T_0 \cap E_1 E_2$  Elemente  $t$   
mit  $t^2 = r_0$ . Wir beachten nun, daß  $N := C_{L_0}(r_0) = E_1 E_2 A_0$

ist mit  $(N \# E_1 E_2) = 1 r_0 + 14 r_1 + 14 r_2 + 42 r_1 r_2 + 56 d_1 d_2$  ; insbesondere sind also alle Elemente der Ordnung vier in  $E_1 E_2$  unter  $N$  konjugiert. Mit den Relationen aus (3.2) berechnen wir ferner  $C_V(d_1 d_2) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 u_5 \rangle = E(2^4)$  und  $[V, d_1 d_2] = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_6, v_1 \rangle \leq C_V(r_0)$  . Damit gilt also folgendes:

(3) Es ist  $|T_0 \cap E_1 E_2| \geq 2^5$  ; insbesondere ist  $\Theta := \{ t \mid t \in T_0 \cap E_1 E_2, t^2 = r_0 \} \neq \emptyset$  . Ferner gilt  $x_0 \in [V, t] \leq C_V(r_0)$  für  $t \in \Theta$  .

Wir nehmen nun an, daß  $Y_0 = W_5$  ist. Dann folgt wegen  $C_V(r_0) = W_5 \cdot \langle u_4, u_5, u_6 \rangle$  und  $U_0 \cdot r_0 \cap \text{ccl}_J(u_1) = W_3 \cdot r_0$  o.B.d.A.  $x_0 = 1$  . Damit erhalten wir aber den Widerspruch  $v_1 r_0 \in Y \cap \text{ccl}_J(w_1)$  . Also gilt  $Y_0 \neq W_5$  .

Es sei nun  $Y_0 = W_4$  . Da  $C_V(r_0) = [V, r_0] \langle u_4, u_5, u_6, v_1 \rangle$  ist, können wir dann o.B.d.A.  $x_0 \in \langle u_5, u_6, v_1 \rangle$  annehmen. Da  $\{u_4, u_5, u_6, u_5 u_6, v_1\} \cdot r_0 \leq \text{ccl}_J(w_1)$  ist, folgt dann  $x_0 \in \{u_5 v_1, u_5 u_6 v_1, u_6 v_1\}$  . Offensichtlich ist  $|T_0| \geq 2^9$  und somit  $\langle d_1, d_2 \rangle \leq T' \leq T_0$  . Nach (3) erhalten wir nun  $x_0 \in [V, d_1 d_2]$  und damit schließlich  $x_0 = u_6 v_1$  .

Aus (2) folgt  $x_0 \cdot \text{ccl}_{T_0}(x_0) \leq Y_0[V, r_0] = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$  . Da  $C_T(u_6 v_1) = \langle r_0, d_1 t_2, r_1 d_2, t_1, s_2 \rangle$  ist und ferner  $u_6 v_1: r_2 \rightarrow u_1 r_2, d_2 \rightarrow u_2 d_2, t_2 \rightarrow u_1 u_3 t_2, r_3 \rightarrow u_4 r_3$  gilt, folgt offensichtlich  $T_0 = E_1 E_2 \cdot \langle r_3, s_2 \rangle$  . Dann ist aber  $t_1 r_2 \in \Theta$  . Mit den Relationen aus (3.2) berechnen wir daher  $[V, t_1 r_2] = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1 \rangle$  ; offensichtlich ist  $x_0 = u_6 v_1$  nicht in dieser Gruppe enthalten. Wir haben somit einen Widerspruch zu (3) erhalten. Es ist somit also  $Y_0 \neq W_4$  .

Da  $Y_0$  nicht in  $\{W_4^-, W_5\}$  enthalten ist, erhalten wir mit den Aussagen in (1) und (2) nun folgendes:

- (4) Es ist  $T' = \langle r_0, r_1, r_2, r_3, d_1, d_2 \rangle \leq T_0$  und  
 $|T : T_0| \leq 2$  sowie  $W_2 \leq Y_0 \leq W_3 = [V, r_0]$  und  
 $[x_0, t] \in W_3$  für alle  $t \in T_0$ .

Da  $[V, d_1 d_2] = W_3 \cdot \langle u_4, u_6, v_1 \rangle$  ist, folgt aus (3) nun offensichtlich o.B.d.A.  $x_0 \in \langle u_4, u_6, v_1 \rangle$ . Wir haben schon festgestellt, daß  $\{u_4, u_4 u_6, u_6, v_1\} \cdot r_0 \leq \text{ccl}_J(W_1)$  ist; also gilt  $x_0 \in \{1, u_4 v_1, u_4 u_6 v_1, u_6 v_1\}$ . Wir beachten, daß  $r_3 \in T_0$  ist mit  $r_3: u_4 \rightarrow u_4, v_1 \rightarrow v_1, u_6 \rightarrow u_4 u_6$ ; mit (4) folgt jetzt  $x_0 \in \langle u_4 v_1 \rangle$ .

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß wir  $Y$  natürlich o.B.d.A. so wählen können, daß  $Y_0$  von maximaler Ordnung ist; die Aussagen in (1) - (4) sind offensichtlich dann auch noch richtig. Da  $S = VT \cdot \langle s \rangle \in \text{Syl}_2(J)$  ist und  $[W_3, s] = \langle 1 \rangle$  sowie  $s: r_0 \rightarrow v_1$  gilt, folgt jetzt also o.B.d.A.  $x_0 = u_4 v_1$ .

Mit den Relationen aus (3.2) berechnen wir nun leicht  $[V, t_2 r_1] = [V, t_2 t_1 r_1] = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 u_5, u_6, v_1 \rangle$ ; da  $x_0$  nicht in dieser Gruppe enthalten ist und da  $r_1 \in T_0$  sowie  $(t_2 r_1)^2 = (t_2 t_1 r_1)^2 = r_0$  ist, folgt aus (3) dann offensichtlich  $T_0 \cap \langle t_1, t_2 \rangle \leq \langle t_1 \rangle$ . Mit (4) folgt nun:

- (5) O.B.d.A. gilt  $x_0 = u_4 v_1$ ; ferner ist  $|T_0| = 2^9$   
 und  $T_0 \cap \langle t_1, t_2 \rangle = \langle t_1 \rangle$  sowie  $Y_0 = W_3$ .

Es existieren also Elemente  $v$  und  $w$  in  $V$  mit  $\{vt_1, wr_3\} \leq Y$ . Da  $(wr_3)^2 = [w, r_3] \in [V, r_3] \cap Y_0 = \langle u_1 \rangle$  und  $[u_3, r_3] = u_1$  ist, können wir wegen  $\text{ccl}_V(r_0) = Y_0 \cdot r_0$



und  $C_V(r_3) = Y_0[V, r_3] \cdot \langle u_5, v_1, v_3 \rangle$  dann o.B.d.A. annehmen, daß  $w \notin \langle u_5, v_1, v_3 \rangle$  ist. Insbesondere gilt dann auch  $w_2 \cdot w r_3 \notin \text{ccl}_J(u_1)$ . Wir beachten nun, daß unter dem Element  $q_1 a_1$  die folgende Konjugation stattfindet:  $r_3 \rightarrow r_0$ ,  $u_2 \rightarrow u_1 u_2 u_3 u_5$ ,  $u_5 \rightarrow u_1 u_2 u_3 v_1$ ,  $v_1 \rightarrow u_2 u_4$ ,  $v_3 \rightarrow u_6$ . Aus (3.8) wissen wir, daß  $U_0 \cdot r_0 \cap \text{ccl}_J(u_1) = W_3 \cdot r_0$  ist; damit folgt nun  $w \in \{u_5 v_1, u_5 v_3, u_5 v_1 v_3\}$ .

Mit  $(vt_1)^2 \in [V, t_1] \cap Y_0 = \langle u_2, u_1 u_3 \rangle$  und  $[u_4, t_1] = u_2$  und  $[u_5, t_1] = u_1 u_2 u_3$  folgt  $v \in U_0 \cdot \langle v_1, v_3, v_4 \rangle$ .

Offensichtlich enthält  $Y$  das Element  $[vt_1, r_3 w] = w \cdot [w, t_1] \cdot [v, r_3]^{t_1} \cdot r_1 \cdot w$ ; wegen  $[w, r_1] = [u_5, r_1] = u_1 \in Y_0$  sowie  $[w, t_1] = [u_5, t_1] = u_1 u_2 u_3 \in Y_0$  enthält  $Y$  auch das Element  $[v, r_3]^{t_1} \cdot r_1$ . Da  $[V, r_3]^{t_1} = \langle u_1, u_2 u_4, v_1 v_2 \rangle$  ist, existiert dann ein Element  $x_1 \in \langle u_4, v_1 v_2 \rangle$  mit  $x_1 r_1 \in Y$ . Da  $(v_2 r_1)^S = w_1 r_1 r_2$  und  $(u_4 v_2 r_1)^S = u_3 r_1 r_2$  ist mit  $\{w_1, u_3\} \subseteq C_U(r_1 r_2) \setminus [U, r_1 r_2]$ , folgt mit (3.8) dann wegen  $v_1 \in [V, r_1]$  offensichtlich  $r_1 v_1 v_2 \cdot \langle u_4 \rangle \subseteq \text{ccl}_J(w_1)$ . Also ist  $x_1 \in \langle u_4 \rangle$ . Wegen  $(u_4 r_1)^{\text{sq}_1} = v_1 r_0 \notin \text{ccl}_J(w_1)$  folgt schließlich  $x_1 = 1$ .

Wir haben gezeigt, daß  $r_1$  in  $Y$  enthalten ist. Dann gilt auch  $u_3 r_1 \in Y$ . Nach (3.4) ist  $u_3 \notin [U, r_1]$ ; mit (3.8) sehen wir nun, daß  $u_3 r_1 \in \text{ccl}_J(w_1)$  ist. Wir haben damit einen endgültigen Widerspruch erhalten.

Also gilt  $|Y| \leq 2^{11}$  sowie insbesondere  $|X| \leq 2^{12}$ .

Q.E.D.

#### §4 EINFACHE SEKTIONEN IN J

In diesem Paragraphen wollen wir zunächst die einfachen Gruppen aus  $\mathcal{K}$  bestimmen, welche als Sektionen in  $J$  involviert sind.

(4.1) Lemma. (a) Ist  $X$  eine nichtabelsche, einfache Gruppe aus  $\mathcal{K}$ , welche als echte Sektion in  $J$  involviert ist, so ist  $X$  isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

- (1) Mathieu-Gruppe  $M_n$  mit  $n \in \{11, 12, 22, 23, 24\}$  ;
- (2) Alternierende Gruppe  $\text{Alt}_n$  mit  $n \in \{5, 6, 7, 8\}$  ;
- (3)  $L_2(7)$  ,  $L_2(11)$  ,  $L_2(23)$  ,  $L_2(32)$  ,  $L_3(4)$  ,  $L_5(2)$  ;
- (4)  $U_3(3)$  ,  $U_3(11)$  .

(b) Eine minimale nichtabelsche einfache  $\mathcal{K}$ -Sektion von  $J$  ist isomorph zu  $\text{Alt}_5$  ,  $L_3(2)$  ,  $L_2(23)$  oder  $L_2(32)$  .

Beweis. Wir verifizieren die Liste in (a) durch Ordnungsvergleich und Vergleich der Sylow-Normalisatoren; ferner beachten wir die Tatsache, daß es in  $J$  weder zyklische Gruppen der Ordnung 9 noch Diedergruppen der Ordnung 14 gibt.

Die Aussage in (b) folgt nun trivialerweise aus (a) und Resultaten in J. Thompsons berühmter N-Gruppen Arbeit [74] .

Q.E.D.

(4.2) Lemma. In  $J$  gibt es genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu  $U_3(11)$ ; ist  $G$  eine solche Untergruppe von  $J$ , so ist  $N_J(G)$  isomorph zu  $PEU_3(11) \cong U_3(11) \cdot Z_2$ .

Beweis. Nach einem Resultat von S. Norton [46] gibt es in  $J$  eine Untergruppe  $G$  isomorph zu  $U_3(11)$ ; dann hat  $G$  die Ordnung  $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 37$ .

Es sei nun  $P \in \text{Syl}_{11}(G)$ ; dann ist  $N_G(P) = P \cdot X$  eine maximale Untergruppe von  $G$  mit  $X \cong Z_{40}$ . Da  $N_J(P)/P$  isomorph zu  $Z_5 \times GL_2(3)$  ist, ist dann  $P \cdot X$  bis auf Konjugation in  $J$  eindeutig bestimmt. Wir setzen nun  $X = \langle x \rangle$ ,  $x_0 = x^8$  und  $x_1 = x^5$  sowie  $X_i = \langle x_i \rangle$  für  $i \in \{0, 1\}$ . Dann ist  $N_G(X) = N_G(X_0) = X \cdot \langle t \rangle$  mit einer Involution  $t$  derart, daß  $t : x_0 \rightarrow (x_0)^4$ ,  $x_1 \rightarrow (x_1)^5$ ,  $x \rightarrow x^{29}$  gilt. Insbesondere ist also  $G = \langle P, X, t \rangle$ .

Da  $C_J(X) = X$  und  $\text{Aut}_J(X) \cong Z_4 \times Z_2 \times Z_2 \cong \text{Aut}(X)$  ist, ist  $X \cdot \langle t \rangle$  eine eindeutig bestimmte Untergruppe von  $N_J(X)$ . Somit ist also  $G$  bis auf Konjugation in  $J$  eindeutig bestimmt.

Da  $N_J(X) \cap N_J(P) = X \cdot \langle j \rangle$  ist mit einer Involution  $j$  derart, daß  $j : x_0 \rightarrow x_0$ ,  $x_1 \rightarrow (x_1)^3$  gilt, und da ferner  $\text{Aut}_J(X)$  abelsch ist, liefert das Frattini-Argument nun, daß  $N_J(G) = G \cdot \langle j \rangle \cong PEU_3(11)$  ist.

Q.E.D.

(4.3) Lemma. (a) In  $J$  gibt es genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen, welche zu  $L_2(32)$  isomorph sind. Ist  $L_2(32) \cong G \leq J$ , so ist  $N_J(G) = L_2(32) \cdot Z_5 \cong \text{P}\Gamma L_2(32)$ .

(b) Ist  $G$  eine maximale Untergruppe von  $J$ , welche eine Sektion isomorph zu  $L_2(32)$  involviert, so gilt  $G' \cong L_2(32)$  und  $G = N_J(G') \cong \text{P}\Gamma L_2(32)$ .

Beweis. Nach einem Resultat von D.Benson [10] gibt es in  $J$  eine Untergruppe  $G$  isomorph zu  $L_2(32)$ ; bekanntlich hat  $G$  die Ordnung  $2^5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$ .

Es sei  $P \in \text{Syl}_2(G)$ ; dann ist  $N_G(P) = P \cdot Z \cong E(2^5) \cdot Z_{31}$ . Da  $Z_{31} \cdot Z_2 \cong N_G(Z) \leq N_J(Z) \cong Z_{31} \cdot Z_{10}$  ist und da  $N_G(P)$  eine maximale Untergruppe von  $G$  ist, folgt  $G = \langle N_G(P), N_G(Z) \rangle$ .

Nach (3.20) können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $P$  in  $V$  enthalten ist; mit (3.21) folgt die Existenz von genau zwei  $J$ -Konjugiertenklassen von Untergruppen isomorph zu  $N_G(P)$ . Insbesondere gibt es in  $J$  höchstens zwei Klassen von zu  $L_2(32)$  isomorphen Untergruppen.

In (3.21) haben wir ferner festgestellt, daß die Elemente der Ordnung fünf aus  $N_J(Z)$  auch die Gruppe  $N_G(P)$  normalisieren. Damit folgt dann offensichtlich  $N_J(G) \cong \text{P}\Gamma L_2(32)$ .

Wir wissen, daß die Involutionen aus  $G$  in  $\text{ccl}_J(w_1)$  liegen; ferner sind Elemente der Ordnung 11 aus  $G$  in  $\text{ccl}_J(x_1)$  enthalten. Mit Hilfe der Charaktertafel von  $G$  berechnen wir  $\zeta_G(x, y, z) = 1$ , wobei  $o(x) = 2$ ,  $o(y) = 3$ ,  $o(z) = 11$  und  $x \cdot y \cdot z = 1$  ist. Da  $N_G(\langle y \rangle) \cong N_G(\langle z \rangle) \cong Z_{33} \cdot Z_2$  eine maximale Untergruppe von  $G$  ist, sehen wir nun leicht, daß  $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle = G$  ist. Wir berechnen nun auch

$\zeta_J(x_3, x_4, x_{19}) = 25/24$ . Da  $C_J(G) = \langle 1 \rangle$  ist, gibt es nach (1.24) in  $J$  dann offensichtlich genau eine Konjugiertenklasse von zu  $L_2(32)$  isomorphen Untergruppen. Damit gilt also die Behauptung unter (a).

Es sei nun  $G$  eine maximale Untergruppe von  $J$  und  $X$  und  $Y$  seien Untergruppen von  $G$  derart, daß  $X/Y \cong L_2(32)$  ist. Aus der lokalen Struktur von  $J$  folgt mittels des Frattini-Argumentes zunächst  $Y = O_2(X)$ . Aus (3.20) und (3.21) folgt nun unmittelbar  $Y = \langle 1 \rangle$ .

Es sei nun  $G_0$  ein minimaler Normalteiler von  $G$ ; dann gilt offensichtlich  $X \leq G_0$ . Ferner sei  $P \in \text{Syl}_2(X)$  und  $N_X(P) = P \cdot Z$  mit  $Z \cong Z_{31}$ .

Ist nun  $|G_0|_2 > 2^{10}$ , so folgt nach (3.20) und (3.21) zunächst o.B.d.A.  $P < V < N_{G_0}(P)$  und damit dann auch  $N_{G_0}(V) < V \cdot Z$ . Mit (1.1) folgt jetzt  $L = N_J(V) \leq G_0$ . Mit (2.6) erhalten wir jetzt den Widerspruch  $G_0 = J$ .

Wir haben gezeigt, daß  $|G_0|_2 \leq 2^{10}$  ist. Mit (1.9) und (4.1) folgt nun  $G_0 = X$  und damit schließlich auch  $G = N_J(G_0) \cong \text{P}\Gamma\text{L}_2(32)$ .

Q.E.D.

(4.4) Lemma. Ist  $X$  eine nichtabelsche, einfache  $\mathcal{K}$ -Sektion von  $J$  mit  $\text{Aut}_J(X) > X$ , so ist  $\text{Aut}_J(X)$  isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

- (1)  $\text{Aut}(M_{12})$ ,  $\text{Aut}(M_{22})$ ;
- (2)  $\text{Sym}_5$ ,  $\text{Sym}_6$ ,  $\text{PGL}_2(9)$ ,  $M_{10}$ ,  $\text{Aut}(\text{Alt}_6)$ ;
- (3)  $L_3(4) \cdot \langle \delta \rangle$ ,  $L_3(4) \cdot \langle \varphi \rangle$ ,  $L_3(4) \cdot \langle \delta, \varphi \rangle$ , wobei  $\delta$  ein äußerer Automorphismus der Ordnung 3 ist und  $\varphi$  vom Körperautomorphismus induziert wird.
- (4)  $\text{PGL}_2(11)$ ,  $\text{PGL}_2(23)$ ,  $\text{PTL}_2(32)$ ,  $\text{PEU}_3(11)$ .

Beweis. Da die Automorphismengruppe einer jeden der in (4.1) aufgelisteten einfachen Gruppen wohlbekannt ist und da es in  $J$  keine Diedergruppen der Ordnung 14 gibt, kann man nun unter Berücksichtigung der lokalen Struktur von  $J$  leicht die Behauptung des Lemmas verifizieren.

Q.E.D.

(4.5) Lemma. Ist  $X$  eine einfache Untergruppe von  $J$  mit  $|\Pi(X)| = 3$ , so ist  $X$  isomorph zu  $\text{Alt}_5$ ,  $\text{Alt}_6$ ,  $L_3(2)$  oder  $U_3(3)$ .

Beweis. Aus (4.1.b) folgt sofort  $\Pi(X) = \{2, 3, p\}$  mit  $p \in \{5, 7\}$ . Mit Resultaten von Brauer [14] und Wales [80] folgt nun zusammen mit (4.1) die Behauptung.

Q.E.D.

(4.6) Lemma. Es sei  $X$  eine nichtabelsche einfache Untergruppe von  $J$ . Ist  $X$  nicht vom Charakteristik 2-Typ, so liegt genau einer der folgenden Fälle vor:

(a)  $X$  ist vom 'Component'-Typ und isomorph zu  $M_{12}$  oder  $U_3(11)$ .

(b)  $X$  ist vom 'Noncomponent'-Typ und isomorph zu  $\text{Alt}_7$ ,  $L_2(11)$  oder  $L_2(23)$ .

Beweis. Ist  $X$  in  $\mathcal{K}$  enthalten, so liefert eine Inspektion der in (4.1) aufgelisteten Gruppen die Behauptung des Lemmas. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß  $X$  nicht in  $\mathcal{K}$  enthalten ist.

Wir nehmen nun an, daß  $X$  vom 'Component'-Typ ist. Dann gibt es eine Involution  $t$  in  $X$  derart, daß  $C_X(t)$  nicht 2-constrained ist. Wir setzen  $C := C_X(t)$ ,  $Q := O(C)$  sowie  $\bar{C} := C/Q$ . Wir zeigen jetzt, daß  $X$  die  $B(G)$ -Vermutung erfüllt; d.h., daß  $L(\bar{C}) = \overline{L(C)}$  gilt.

Offensichtlich können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $Q \neq \langle 1 \rangle$  ist. Wir wissen, daß  $L(\bar{C})$  und  $L(C)$  zentrale Produkte von quasi-einfachen Gruppen sind. Es sei daran erinnert, daß  $H/O_2(H) \cong \widehat{\text{Aut}}(M_{22})$  und  $H_1/O_2(H_1) \cong \text{Aut}(M_{22})$  ist. Da Untergruppen ungerader Ordnung in  $M_{22}$  einen auflösbaren Normalisator in  $\text{Aut}(M_{22})$  haben und da Elemente der Ordnung drei aus  $O_{2,3}(H)$  fixpunktfrei auf  $E/Z(E)$  operieren, folgt nun offensichtlich  $Q \cong Z_3$  und  $C \not\leq \widehat{\text{Aut}}(M_{22})$ . Jetzt ist aber klar, daß  $L(\bar{C})$  und  $L(C)$  quasi-einfache Gruppen sind mit  $L(\bar{C}) = \overline{L(C)}$ . Somit erfüllt  $X$  die  $B(G)$ -Vermutung.

Wir sind nun in der Lage, Aschbachers 'Component'-Theorem [17; Thm. (A1;5.4)] anzuwenden; daraus folgt, daß  $X$  eine Standarduntergruppe  $Y$  enthält. Dann ist  $Y/Z(Y)$  eine ein-

fache Gruppe, welche in  $M_{22}$  involviert ist; also ist  $Y/Z(Y)$  isomorph zu  $Alt_5$ ,  $Alt_6$ ,  $Alt_7$ ,  $L_3(2)$ ,  $L_3(4)$ ,  $L_2(11)$  oder  $M_{22}$ . Mit (1.14) folgt nun  $X \in \mathcal{K}$ , da  $M_{22}$  nicht in Zentralisatoren von Elementen der Ordnung vier in  $J$  involviert ist. Wir haben somit also einen Widerspruch erhalten.

Wir haben gezeigt, daß  $X$  nicht vom 'Component'-Typ ist; insbesondere sind dann die 2-lokalen Untergruppen von  $X$  alle 2-constrained.

Da  $X$  nicht in  $\mathcal{K}$  enthalten ist, hat  $X$  nach (1.10) den sektionalen 2-Rang mindestens fünf. Mit einem Resultat von McWilliams [42] folgt dann  $SCN_3(2) \neq \emptyset$  in  $X$ . Wir können nun Korollar 1.39 und Theorem 1.40 aus [25] anwenden und erhalten damit, daß für jede 2-lokale Untergruppe  $Y$  von  $X$  stets  $O(Y) = \langle 1 \rangle$  ist. Somit ist  $X$  dann vom Charakteristik 2-Typ.

Q.E.D.



Wir wollen im folgenden für einige der in (4.1) aufgelisteten einfachen Untergruppen  $G$  von  $J$  untersuchen, wie das Fusionsschema von  $G$  innerhalb von  $J$  ist, d.h. in welchen  $J$ -Klassen die Repräsentanten der verschiedenen  $G$ -Konjugiertenklassen liegen. Dabei werden wir für die Repräsentanten der  $J$ -Klassen die Bezeichnung von (2.8) beibehalten.

(4.7) Lemma. Es sei  $\text{Ex}(3^3) \cong D \in \text{Syl}_3(J)$ ; wir erinnern daran, daß  $C_J(D) = Z(D) \times \langle u \rangle$  und  $N_J(D) = \langle u \rangle \times D \cdot Q$  mit  $u \in \text{ccl}_J(u_1)$  und  $Q \cong \text{SD}_{16}$  ist.

Ist  $x \in N_J(D)$  mit  $o(x) = 8$ , so ist  $x \in \text{ccl}_J(x_{15})$  und  $x^2 \in \text{ccl}_J(x_5)$ .

Beweis. Wir setzen  $N = N_J(D)$  und nehmen o.B.d.A. an, daß  $Z(D) = \langle a_1 \rangle$  ist. Dann gilt also  $C_J(D) = \langle u_1 \rangle \times Z(D)$  und  $N \leq H_0 = N_J(\langle a_1 \rangle)$ . Wir setzen ferner  $\bar{H}_0 = H_0 / \langle u_1 \rangle$  und  $P = \langle u_1, u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, s \rangle$ ; wir wissen bereits, daß  $S_0 = P \cdot \langle d_2, s_2, t_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $(H_0)'$  und  $S_0 \cdot \langle t_1 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $H_0$  ist. Wir können somit o.B.d.A. annehmen, daß  $x \in S_0 \langle t_1 \rangle$  gilt. Da  $(H_0)' \cap N \cong Z_2 \times \text{Ex}(3^3) \cdot Q_8$  ist, folgt  $x \in S_0 \cdot t_1$ . Da  $u_1$  keine Quadratwurzeln in  $H_0$  hat, ist  $o(\bar{x}) = 8$ . Wegen  $D_8 \cong \bar{S}_0 / \bar{P} \leq \bar{S}_0 \langle \bar{t}_1 \rangle / \bar{P} \cong D_8 \times Z_2$  sowie  $P \cong E(2^5)$  sehen wir nun leicht, daß o.B.d.A.  $x \in P \cdot t_2 s_2 t_1$  ist. Mit den Relationen aus (3.2) - (3.4) berechnen wir außerdem  $t_2 s_2 t_1$ :  $u_1 + u_1, u_6 + u_6, v_3 d_2 + u_6 v_3 d_2, v_4 t_2 + u_6 v_3 d_2 v_4 t_2, s + u_6 v_3 d_2 v_4 t_2 s$ ; damit erhalten wir o.B.d.A.  $x \in \langle u_1, s \rangle t_2 s_2 t_1$ . Wegen  $y^4 = 1$  für  $y \in \langle u_1 \rangle t_2 s_2 t_1$ , folgt  $x \in \langle u_1 \rangle s t_2 s_2 t_1$ .

Insbesondere gilt dann  $x^2 = v_4 t_2 d_2$  und  $x^4 = u_6$ . Wegen  $x^{t_1} = u_1 u_6 x$  und  $u_6 s t_2 s_2 t_1 \in \text{ccl}_p(st_2 s_2 t_1)$  können wir also o.B.d.A. annehmen, daß  $x = s t_2 s_2 t_1$  gilt.

Wir beachten nun, daß für  $q = (q_0)^4 (q_2)^6$  folgendes gilt:  
 $q : u_6 \rightarrow u_1$ ,  $v_4 t_2 d_2 \rightarrow v_1 r_2$ . Mit (2.8) sehen wir nun leicht, daß  $x^2 \in \text{ccl}_j(x_5)$  und somit auch  $x \in \text{ccl}_j(x_{15})$  ist.

Q.E.D.

(4.8) Lemma. Es sei  $E(3^2) \cong D \leq J$  und  $x \in N_J(D)$  derart, daß  $o(x) = 4$  und  $C_D(x) = C_D(x^2) = \langle 1 \rangle$  ist. Dann liegt genau einer der folgenden zwei Fälle vor:

- (1) Es ist  $x^2 \in \text{ccl}_j(x_2)$  und  $x \in \text{ccl}_j(x_6)$ .
- (2) Es ist  $x^2 \in \text{ccl}_j(x_3)$  und  $x \in \text{ccl}_j(x_7)$ .

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß  $D = \langle a_1, a_3 \rangle$  ist. Wir wissen, daß  $C_J(D) = D \times \langle u_1, u_6, s \rangle$  und außerdem  $N_J(D)/C_J(D) \cong \text{GL}_2(3)$  ist. Da  $D \in \text{Syl}_3(A_2)$  ist und ferner  $N_{A_2}(D) = D \cdot F$  mit  $F = \langle j_1 t_1, t_1, s_2 \rangle \cong D_8$  und  $o(j_1 t_1) = 4$ , können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $x \in Y \cdot j_1 t_1$  ist, wobei  $Y = \langle u_1, u_6, s \rangle$  ist.

Wir beachten, daß  $j_1 t_1 : u_1 \rightarrow u_6 \rightarrow u_1$ ,  $s \rightarrow s$  sowie  $(j_1 t_1)^2 = t_1 s_2$  gilt. Es sei nun  $w \in Y$  mit  $x = w \cdot j_1 t_1$ . Dann gilt  $x^2 = [w, j_1 t_1] \cdot t_1 s_2 \in \langle u_1 u_6 \rangle t_1 s_2$ , wobei wegen  $[U, t_1 s_2] = \langle u_2, u_1 w_1, u_1 v_1 r_0, u_6 v_3 d_2 \rangle$  nach (3.8) dann  $t_1 s_2 \in \text{ccl}_j(u_1)$  und  $u_1 u_6 t_1 s_2 \in \text{ccl}_j(w_1)$  ist.

Ist  $x^2 = u_1 u_6 t_1 s_2$ , so folgt mit (2.8) sofort die Behauptung im Fall (2). Wir nehmen somit o.B.d.A. an, daß  $x^2 = t_1 s_2$  gilt. Offensichtlich ist dann ferner o.B.d.A.

$w \in \langle u_1, s \rangle$  ist. Ist  $w \in u_1 \langle s \rangle$ , so folgt der Widerspruch  $x^2 = u_1 u_6 t_1 s_2$ ; also gilt  $w \in \langle s \rangle$  und somit  $x \in \langle s \rangle_{j_1 t_1}$  sowie  $x^2 = t_1 s_2$ .

Wir beachten nun, daß  $A = C_{A_2}(s) \cong \text{Alt}_7$  ist und ferner  $\langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2 \rangle \in \text{Syl}_2(A)$ . Da  $j_1 t_1 \in A$  ist, gibt es ein Element  $g \in A$  mit  $y = x^g \in \langle s \rangle r_1 s_1 t_1 s_2$ ; ferner ist dann  $y^2 = (x^2)^g = r_1 r_3 d_1$ .

Wir betrachten das Element  $q = a_6(a_3)^2 a_6 s q_1(q_0)^5$ . Mit Hilfe der Relationen in (3.2) - (3.4) berechnen wir nun, daß  $(r_1 r_3 d_1)^q = u_1$  und  $y^q \in \langle u_1 u_2 u_3 v_4 \rangle u_4 t_2 d_1$  gilt. Offensichtlich ist also  $y^q \notin E = O_2(H)$ . Mit (2.8) sehen wir nun, daß  $y \in \text{ccl}_J(x_6)$  ist.

Q.E.D.

(4.9) Lemma. Es sei  $x$  ein Element der Ordnung acht aus  $J$  mit  $x^4 = u_1$  und  $\bar{H} = H/E$ . Dann gilt folgendes:

(a) Ist  $x \in \text{ccl}_J(x_{14})$ , so ist  $x$  in  $H - H'$  enthalten und es gilt  $o(\bar{x}) = 4$ .

(b) Ist  $x \in \text{ccl}_J(x_{15})$ , so ist  $x$  in  $H - H'$  enthalten und es gilt  $o(\bar{x}) = 2$ .

(c) Ist  $x \in \text{ccl}_J(x_{16})$ , so ist  $x$  in  $H' - E$  enthalten und es gilt  $o(\bar{x}) = 4$ .

Beweis. Die Aussage in (b) folgt unmittelbar aus (2.8) und (4.7).

Wir nehmen nun an, daß  $x \in \text{ccl}_J(x_{14})$  ist. Nach (2.8) gilt dann  $|C_J(x)| = 2^8 \cdot 3$  und  $o(\bar{x}) = 4$ . Da  $u_1$  in  $H_0$  keine Quadratwurzeln hat, ist  $C_{E\langle a_1 \rangle}(x) = C_E(x)$  und somit  $o(\tilde{x}) = 4$  und  $3 \mid |C_{\tilde{H}}(\tilde{x})|$ , wobei  $\tilde{H} = H/O_{2,3}(H) \cong \text{Aut}(M_{22})$

ist. Da für Elemente  $y$  der Ordnung vier aus  $\tilde{H}'$  stets  $C_{\tilde{H}}(y)$  eine 2-Gruppe ist, folgt also  $\tilde{x} \in \tilde{H} - \tilde{H}'$  und damit auch  $x \in H - H'$ . Somit gilt (a).

Wir beachten nun, daß  $x = u_5 v_1 v_2 r_0 d_1 \cdot u_6 s_2 t_2$  ein Element aus  $H'$  ist mit  $x^2 = u_4 u_5 r_1 \cdot d_2$  und  $x^4 = u_1$ . Die Aussage in (c) folgt nun aus (2.8) sowie (a) und (b).

Q.E.D.

(4.10) Lemma. Es sei  $G$  eine zu  $Z_6 \times Z_2$  oder  $D_{12}$  isomorphe Untergruppe von  $J$  derart, daß alle Involutionen aus  $G$  in  $\text{ccl}_J(u_1) = \text{ccl}_J(x_2)$  liegen. Dann sind alle Elemente der Ordnung sechs aus  $G$  in  $\text{ccl}_J(x_{10})$  enthalten.

Beweis. Wir können nach (2.8) o.B.d.A. annehmen, daß  $x = u_1 a_1$  ein Element der Ordnung sechs aus  $G \cap \text{ccl}_J(x_9)$  ist. Dann ist  $\langle x \rangle \trianglelefteq G = \langle x \rangle \cdot \langle t \rangle$  mit einer Involution  $t$  aus  $\text{ccl}_J(u_1)$ . Da  $G \leq H_0$  und  $(H_0)' / \langle x \rangle \cong M_{22}$  ist, gilt wegen  $u_6 \in (H_0)'$  und  $u_1 u_6 = w_2 \in \text{ccl}_J(w_1)$  dann offensichtlich  $t \in H_0 - (H_0)'$ . Nach Voraussetzung ist  $u_1 t \in \text{ccl}_J(u_1)$ ; nach (3.11) ist dies jedoch unmöglich. Die Behauptung folgt nun trivialerweise aus (2.8).

Q.E.D.

(4.11) Lemma. (a) In  $M = U \cdot M_0 = E(2^{11}) \cdot M_{24}$  gibt es genau zwei Konjugiertenklassen von zu  $M_{24}$  isomorphen Untergruppen; für Repräsentanten  $C_0$  und  $C_1$  dieser zwei Klassen gilt o.B.d.A.  $E_2 \cdot A_2 \leq C_0$ ,  $V_1 \cdot A_2 \leq C_1$  sowie  $C_0 \cap C_1 = M_{23}$ . Ferner sind sämtliche Involutionen aus  $C_0$  in  $\text{ccl}_J(u_1)$  enthalten, während die 2-zentralen Involutionen aus  $C_1$  in  $\text{ccl}_J(u_1)$  und die nicht-2-zentralen Involutionen aus  $C_1$  in  $\text{ccl}_J(w_1)$  enthalten sind.

(b) In  $M$  gibt es genau eine Konjugiertenklasse von zu  $M_{23}$  isomorphen Untergruppen; die Involutionen einer jeden solchen Untergruppe von  $M$  liegen in  $\text{ccl}_J(u_1)$ .

(c) In  $M$  gibt es genau zwei Konjugiertenklassen von Untergruppen, welche zu  $L_2(23)$  isomorph sind; für Repräsentanten  $X_0$  und  $X_1$  dieser zwei Klassen gilt dann o.B.d.A.  $X_0 \leq C_0$  und  $X_1 \leq C_1$ . Die Involutionen aus  $X_i$  sind in  $C_i$  nicht-2-zentral ( $i = 0, 1$ ).

(d) In  $M$  gibt es genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen, welche zu  $M_{22}$  isomorph sind.

(e) In  $M$  gibt es genau zwei Konjugiertenklassen von Untergruppen, welche zur Mathieu-Gruppe  $M_{12}$  isomorph sind. Für Repräsentanten  $Y_0$  und  $Y_1$  dieser beiden Klassen gilt o.B.d.A.  $Y_i \leq C_i$ ,  $i = 0, 1$ ; dabei sind die 2-zentralen Involutionen aus  $Y_i$  auch 2-zentral in  $C_i$  und die nicht-2-zentralen Involutionen aus  $Y_i$  auch nicht-2-zentral in  $C_i$ .

(f) In  $M$  gibt es genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen, welche zu  $M_{11}$  isomorph sind.

(g) In  $M$  gibt es genau drei konjugierten Klassen von Untergruppen, welche zu  $L_2(11)$  isomorph sind. Für Repräsentanten  $N$ ,  $N_0$  und  $N_1$  dieser Klassen gilt dann o.B.d.A.  $N \leq C_0 \cap C_1$  sowie  $N_i \leq Y_i \leq C_i$ , wobei  $N_i$  eine maximale Untergruppe von  $Y_i$  ist und die Involutionen aus  $N_i$  in  $C_i$  nicht-2-zentral und die Involutionen aus  $N$  in  $C_i$  2-zentral sind ( $i = 0, 1$ ).

Beweis. (a,b) Wir beachten, daß  $M_{24}$  genau zwei Isomorphietypen von irreduziblen  $GF(2)$ -Moduln der Dimension 11 besitzt und daß beide Isomorphietypen in dem 24-dimensionalen Permutationsmodul involviert sind, welcher vom trivialen  $GF(2)$ - $M_{23}$ -Modul induziert wird. Es seien nun  $Q_1$  und  $Q_2$  zwei nichtisomorphe irreduzible  $GF(2)$ - $M_{24}$ -Moduln der Dimension 11; dabei sei o.B.d.A.  $Q_1 \cong U$ . Ferner wissen wir, daß eine Gruppe vom Typ  $Q_2 \cdot M_{24}$  in  $Col.$  involviert ist. Da  $Q_1$  und  $Q_2$  dual zueinander sind und nach einem Resultat in [39] jede zentrale Erweiterung von  $Z_2$  mit  $M$  über  $Z_2$  zerfällt, folgt dann offensichtlich  $H^1(M_{24}, Q_2) = 0$ . Ferner schließen wir aus der Existenz von  $\hat{2}Col.$ , daß  $H^1(M_{24}, Q_1) \neq 0$  ist. Da eine Untergruppe  $X \cong M_{24}$  in  $M$  offensichtlich von einem Sylow 23-Normalisator und einem Sylow 11-Normalisator aus  $X$  erzeugt wird, sehen wir außerdem, daß es in  $M$  dann höchstens zwei konjugierten Klassen von zu  $M_{24}$  isomorphen Untergruppen geben kann. Damit folgt also  $H^1(M_{24}, Q_1) = GF(2)$ ; insbesondere existieren in  $M$  dann genau zwei Klassen von zu  $M_{24}$  isomorphen Untergruppen.

Ist nun  $M_{23} \cong X \leq M$ , so gilt  $X = \langle Q \cdot F, F \cdot Z \rangle$ , wobei  $Q \cdot F \cong Z_{23} \cdot Z_{11}$  ein Sylow 23-Normalisator und  $F \cdot Z \cong Z_{11} \cdot Z_5$

ein Sylow 11-Normalisator in  $X$  ist. Somit ist klar, daß es in  $M$  genau eine Konjugiertenklasse von zu  $M_{23}$  isomorphen Untergruppen gibt. Insbesondere können wir dann auch annehmen, daß  $C_0 \cap C_1 \cong M_{23}$  ist.

Nach (3.24) wissen wir, daß  $E_2 A_2$  und  $V_1 A_2$  Repräsentanten der zwei Konjugiertenklassen von zu  $E(2^4) \cdot \text{Alt}_8$  isomorphen Untergruppen in  $M$  sind. Ferner wissen wir, daß alle Involutionen aus  $E_2 A_2$  in  $\text{ccl}_J(u_1)$  liegen. Offensichtlich ist  $v_2 r_1 = v_2 r_2 \cdot r_1 r_2 \in V_1 A_2$ ; da  $r_1 r_2 \in \text{ccl}_J(u_1)$  ist, folgt mit (3.8) nun  $v_2 r_1 \in \text{ccl}_J(w_1)$ .

Wir nehmen jetzt an, daß es ein  $\bar{C}_1 \in \text{ccl}_M(C_1)$  gibt mit  $E_2 A_2 \leq C_0 \cap \bar{C}_1$ . Dann ist  $E(2^6) \cong R_1 \leq E_2 A_2$ ; außerdem gilt  $N_{C_0}(R_1) = N_{\bar{C}_1}(R_1) \cong E(2^6) \cdot 3\text{Sym}_6$ . Da  $N_M(R_1) = \langle u_1 \rangle \times N_{C_0}(R_1)$  ist, folgt  $N_M(R_1)' = N_{C_0}(R_1)' = N_{\bar{C}_1}(R_1)' \cong E(2^6) \cdot 3\text{Alt}_6$  und somit  $C_0 = \langle E_2 A_2, N_M(R_1)' \rangle = \bar{C}_1$ ; dies ist jedoch absurd. Ebenso zeigen wir, daß  $V_1 A_2$  nicht in  $C_0 \cap \bar{C}_1$  enthalten ist für  $\bar{C}_1 \in \text{ccl}_M(C_1)$ .

Damit folgen nun sämtliche Behauptungen in den Teilen (a) und (b).

(c) Offensichtlich sind die Involutionen einer zu  $L_2(23)$  isomorphen Untergruppe von  $M_{24}$  nicht-2-zentral in  $M_{24}$ . Ist  $L_2(23) \cong X \leq M$ , so gilt  $X = \langle Q \cdot F, F \cdot Z \rangle$ , wobei  $Q \cdot F \cong Z_{23} \cdot Z_{11}$  und  $F \cdot Z \cong Z_{11} \cdot Z_2$  Sylow-Normalisatoren in  $X$  sind. Da  $C_U(F) \cong Z_2$  ist und da es in  $M_{24}$  genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen gibt, welche zu  $L_2(23)$  isomorph sind, folgt die Behauptung nun offensichtlich aus den vorhergehenden Teilen (a) und (b).

(d) Wir beachten, daß es in  $M_{24}$  genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen gibt, welche zu  $M_{22}$  isomorph sind. Wir können dann o.B.d.A. annehmen, daß  $M_{22} \cong X \leq C_0 \cap C_1$  ist. Aus (3.12) wissen wir, daß  $C_U(X) \cong Z_2$  ist und daß  $X$  unzerlegbar auf  $U$  und irreduzibel auf  $U/C_U(X)$  operiert.

Wir setzen nun  $Q = U/C_U(X)$  und nehmen an, daß es einen unzerlegbaren  $X$ -Modul  $F$  gibt mit  $Q \leq F \cong E(2^{11})$ . Nach (3.12) gilt  $(X \# Q) = 231 y_1 + 770 y_2 + 22 y_3$ , wobei ferner  $C_X(y_1) \cong E(2^4) \cdot \text{Sym}_5$  und  $C_X(y_2) \cong E(2^4) \cdot E(3^2) \cdot Z_4$  sowie  $C_X(y_3) \cong L_3(4)$  gilt. Nun verifiziert man leicht, daß  $X$  auf der Menge  $F - Q$  genau drei Bahnen induziert, etwa mit Repräsentanten  $z_0, z_1$  und  $z_2$ ; dabei gilt  $C_X(z_0) \cong L_2(11)$  und  $C_X(z_1) \cong C_X(z_2) \cong \text{Alt}_7$  sowie  $C_X(z_1) \not\perp C_X(z_2)$  in  $X$ . Es sei nun  $Y = C_X(y_3)$ . Wir können dann o.B.d.A. annehmen, daß  $Y_i := Y \cap C_X(z_i) \cong \text{Alt}_6$  und  $Y \cap Y_1 \cap Y_2 \cong D_{10}$  ist. Dann folgt  $C_F(Y_i) = \langle y_3, z_i \rangle$ . Offensichtlich gilt für  $D_{10} = D \leq X$  stets  $C_Q(D) = C_Q(D') \cong E(2^2)$  und  $C_F(D) = C_F(D') \cong E(2^3)$ . Da  $N_X(D')$  die  $X$ -Fusion in  $C_F(D')$  kontrolliert, sehen wir nun leicht, daß  $y_3 = z_1 z_2$  gilt. Somit erhalten wir dann  $C_X(\langle y_3, z_1 \rangle) \geq \langle Y_1, Y_2 \rangle = Y$ ; das ist jedoch unmöglich.

Wir haben damit gezeigt, daß  $H^1(M_{22}, Q) = 0$  ist. Insbesondere gibt es dann in  $U \cdot X$  nur eine Konjugiertenklasse von Untergruppen, welche zu  $M_{22}$  isomorph sind.

(e) Wir beachten, daß die Mathieu-Gruppe  $M_{12}$  genau einen irreduziblen  $\text{GF}(2)$ -Modul  $Q$  der Dimension 10 hat und daß  $H^1(M_{12}, Q) \cong \text{GF}(2) \times \text{GF}(2)$  ist. Ferner gibt es in  $M_{24}$  genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen, welche zu  $M_{12}$  isomorph sind. Ferner sind Involutionen aus  $M_{12}$



genau dann 2-zentral in  $M_{12}$ , wenn sie auch 2-zentral in  $M_{24}$  sind. Ist nun  $M_{12} \cong X \leq M$ , so gilt  $[U, X] \cong E(2^{10})$ ; ferner operiert  $X$  unzerlegbar auf  $U$ . Somit erhalten wir dann  $H^1(X, U) \cong GF(2)$ . Nun folgt die Behauptung mit (a).

(f) Wir beachten, daß es in  $M_{24}$  genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen gibt, welche zu  $M_{11}$  isomorph sind. Ferner hat  $M_{11}$  genau einen irreduziblen  $GF(2)$ -Modul  $Q$  der Dimension 10. Da  $H^1(M_{11}, Q) = 0$  ist, folgt die Behauptung.

(g) Wir beachten zunächst, daß es zu  $L_2(11)$  isomorphe Untergruppen  $N$  und  $N_0$  in  $M$  gibt derart, daß  $\bar{N}$  und  $\bar{N}_0$  Repräsentanten der zwei Konjugiertenklassen von zu  $L_2(11)$  isomorphen Untergruppen in  $\bar{M} = M/U \cong M_{24}$  sind; dabei können wir annehmen, daß  $N \leq C_0 \cap C_1$  gilt und daß  $N_0$  eine maximale Untergruppe von  $Y_0 \cong M_{12}$  ist. Da die maximalen  $L_2(11)$ -Untergruppen von  $M_{12}$  nur nicht-2-zentrale Involutionen aus  $M_{12}$  enthalten, folgt nun aus (e) und (a), daß es noch eine weitere Klasse von zu  $L_2(11)$  isomorphen Untergruppen in  $M$  gibt mit einem Repräsentanten  $N_1 \leq Y_1 \leq C_1$ .

Da nun  $Q = [U, N] \cong E(2^{10})$  ein Konstituent des 11-dimensionalen Permutationsmoduls von  $N$  über  $GF(2)$  ist, gilt  $H^1(N, Q) = 0$ . Andererseits ist  $Q_0 = [U, N_0] = [U, N_1] \cong E(2^{10})$  in dem 12-dimensionalen Permutationsmodul von  $N_0$  über  $GF(2)$  involviert; damit gilt dann  $H^1(N_0, Q_0) \cong GF(2) \times GF(2)$ . Da  $N$  vollständig reduzibel auf  $U$  und  $N_1$  unzerlegbar auf  $U$  operiert, folgt wegen  $UN_0 = UN_1$  nun die Behauptung.

Q.E.D.

(4.12) Lemma. Es sei  $E(3^2) \cdot \text{SD}_{16} \cong G \leq J$  derart, daß  $G$  3-constrained ist und sämtliche Involutionen aus  $G$  in  $\text{ccl}_J(u_1)$  liegen. Dann sind die Elemente der Ordnung acht aus  $G$  in  $\text{ccl}_J(x_{16})$  enthalten.

Beweis. Nach (4.11) existiert eine Untergruppe  $M_0 \cong M_{24}$  in  $M$  mit  $E_2 A_2 \leq M_0$ . Dann ist  $P = \langle a_1, a_3 \rangle$  eine Sylow 3-Untergruppe von  $E_2 A_2$ , wobei nach (3.15) und (3.14) außerdem  $N_J(P) = N_M(P) = (W_0 \times P) \cdot Q$  gilt mit  $\text{GL}_2(3) \cong Q \leq M_0$  und  $W_0 = C_U(P) = \langle u_1, u_6, s \rangle$  sowie  $D_8 \cong \langle j_1 t_1, t_1 \rangle \leq Q$ .

Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß  $P = O_3(G)$  und  $G \leq N_M(P)$  ist mit  $G \cap W_0 = \langle 1 \rangle$ .

Wir beachten nun, daß es in  $M_0$  genau eine Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung acht gibt; ferner ist das Element  $y_0 = t_1 s_1 s_2 t_2$  aus  $M_0$  mit  $(y_0)^2 = r_3 d_1 d_2$  sowie  $(y_0)^4 = r_0$ . Mit Hilfe der Relationen aus (3.2) - (3.4) sehen wir nun leicht, daß  $g = s r_2 (q_1)^6 (q_0)^6 : r_0 \rightarrow u_1$  gilt und daß  $(y_0)^9 = u_2 w_1 v_1 r_2 r_3 d_1 \cdot u_6 d_2 s_2 t_2 a_2 \in H' - E$  ist. Mit (4.9) erhalten wir jetzt  $y_0 \in \text{ccl}_J(x_{16})$ .

Es gibt also ein Element  $y \in \text{ccl}_J(x_{16}) \cap N_{M_0}(P)$  derart, daß  $y^2 = j_1 t_1$ ,  $y^4 = t_1 s_2$  und  $X := \langle y, t_1 \rangle \cong \text{SD}_{16}$  ist sowie  $(W_0 \times P) \cdot X = W_0 \cdot G$ .

Wir beachten, daß  $[W_0, \langle t_1 s_2 \rangle] = \langle 1 \rangle$  ist und außerdem  $j_1 t_1 : u_1 \rightarrow u_6 \rightarrow u_1$ ,  $s : s$  sowie  $t_1 : u_1 \rightarrow u_1$ ,  $u_6 \rightarrow u_6$ ,  $s \rightarrow w_2 s$  gilt mit  $w_2 = u_1 u_6$ . Da  $W_0 \cap \text{ccl}_J(w_1) = \{w_2, s, w_2 s\}$  ist, gilt  $y : u_1 \rightarrow u \rightarrow u_6 \rightarrow v \rightarrow u_1$  mit  $\{u, v\} = \{u_1 s, u_6 s\}$ . Insbesondere gilt  $C_{W_0}(y) = \langle w_2 \rangle$  und  $y^u = y^v = u_1 u y$  und  $y^{u_1} = u_1 v y = u_6 u y$ . Also ist  $W_0 \cdot y = \text{ccl}_{W_0}(y) \cup \text{ccl}_{W_0}(u_1 y)$  mit  $\text{ccl}_{W_0}(\tilde{y}) = \langle w_2, s \rangle \cdot \tilde{y}$  für  $\tilde{y} \in \langle u_1 \rangle \cdot y$ .

Wir nehmen nun an, daß es ein Element  $w \in W_0$  gibt, derart, daß  $Y := \langle u_1 y, w t_1 \rangle \cong SD_{16}$  ist und außerdem eine Sylow 2-Untergruppe von  $G$ . Da  $o(u_1 y) = 8$  ist, können wir außerdem o.B.d.A. annehmen, daß  $w t_1$  eine Involution ist. Also gilt  $w \in C_{W_0}(t_1) = \langle u_1, u_6 \rangle$ . Da  $[s, t_1] = u_1 u_6$  ist und nach (3.11) ferner  $t_1 \in ccl_J(u_1)$  sowie  $u_1 t_1 \in ccl_J(w_1)$  gilt, folgt aus der Voraussetzung nun offensichtlich  $w \in \langle w_2 \rangle$ .

Da  $Y \cong SD_{16}$  ist, gilt  $(u_1 y)^{w t_1} = (u_1 y)^3$ . Nun gilt einerseits  $(u_1 y)^{w t_1} = (u_1 y)^{t_1} = u_1 (y)^{t_1} = u_1 \cdot y^3$ ; andererseits berechnen wir  $(u_1 y)^2 = u_1 v \cdot y^2$  und  $(u_1 y)^3 = u \cdot y^3$ . Damit erhalten wir den Widerspruch  $u_1 = u \in \{u_1 s, u_6 s\}$ . Insbesondere sind die Elemente der Ordnung acht aus  $G$  also in  $ccl_{W_0}(y)$  enthalten. Damit folgt die Behauptung.

Q.E.D.

Wir sind nun in der Lage, die Fusion von Elementen aus einigen einfachen Untergruppen  $G$  von  $J$  innerhalb von  $J$  zu bestimmen. Die Bezeichnungsweise für Elemente von  $G$  übernehmen wir im wesentlichen aus einer Arbeit [40] von McKay; so bezeichnen  $nA, nB, \dots$  Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung  $n$  in  $G$  und mit  $nX(j)$  bezeichnen wir die Klasse der  $j$ -ten Potenzen der Elemente aus  $nX$ , wobei wir noch speziell  $nX^* := nX(-1)$  setzen.

Die folgenden beiden Resultate ergeben sich unmittelbar aus (2.8).

(4.13) Lemma. Für  $\text{Alt}_5 \approx G \leq J$  gilt eines der folgenden Fusionsschemata in  $J$ :

|      | 1A    | 2A    | 3A    | 5A    | 5A(2) |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (I)  | $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_8$ | $x_8$ |
| (II) | $x_1$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_8$ | $x_8$ |

(4.14) Lemma. Für  $L_3(2) \approx G \leq J$  gilt eines der folgenden Fusionsschemata in  $J$ :

|       | 1A    | 2A    | 3A    | 4A    | 7A       | 7A*      |
|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| (I)   | $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ |
| (II)  | $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_6$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ |
| (III) | $x_1$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_7$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ |

(4.15) Lemma. (a) Für  $\text{Alt}_6 \cong G \leq J$  gilt eines der folgenden Fusionsschemata in  $J$  :

|      | 1A    | 2A    | 3A    | 3B    | 4A    | 5A    | 5A(2) |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (I)  | $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_6$ | $x_8$ | $x_8$ |
| (II) | $x_1$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_8$ |

(b) Für  $\text{Alt}_7 \cong G \leq J$  gilt eines der folgenden zwei Fusionsschemata in  $J$  :

|      | 1A    | 2A    | 3A    | 3B    | 4A    | 5A    | 6A       | 7A       | 7A*      |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|
| (I)  | $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_6$ | $x_8$ | $x_{10}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ |
| (II) | $x_1$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ |

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus (2.8) und (4.8) sowie (4.10) .

Q.E.D.

(4.16) Lemma. Für  $\text{Alt}_8 \cong G \leq J$  gilt eines der folgenden zwei Fusionsschemata in  $J$  :

|      | 1A    | 2A    | 2B    | 3A    | 3B    | 4A    | 4B    | 5A    | 6A       | 6B       | 7A       | 7A*      | 15A      | 15A*     |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| (I)  | $x_1$ | $x_2$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_8$ | $x_{10}$ | $x_{10}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{28}$ | $x_{28}$ |
| (II) | $x_1$ | $x_2$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_6$ | $x_6$ | $x_8$ | $x_{10}$ | $x_{10}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{28}$ | $x_{28}$ |

Dabei gilt  $(4A)^2 = 2A$  ,  $(4B)^2 = 2B$  ,  $(6A)^2 = 3A$  ,  $(6A)^3 = 2B$  und  $(6B)^2 = 3B$  sowie  $(6B)^3 = 2A$  .

Beweis. Für Elemente ungerader Ordnung in  $G$  folgt die Behauptung unmittelbar aus (2.8) . Es sei nun  $Z_{15} \cong X \leq G$  , wobei o.B.d.A.  $\langle a_1 \rangle \leq X$  gelte. Dann ist  $C_J(X) = \langle u_1 \rangle \times X$

und  $N_J(X) \cong Z_2 \times \text{Sym}_3 \times F_{20}$ . Insbesondere liegen dann alle Involutionen aus  $N_J(X)$ , welche eine Quadratwurzel in  $N_J(X)$  besitzen, in einer konjugierten Klasse von  $J$ . Da  $A_2 \cong \text{Alt}_8$  ist und sämtliche Involutionen aus  $A_2$  in  $\text{ccl}_J(u_1)$  liegen, sind die Involutionen aus  $N_G(X)$  auch in  $\text{ccl}_J(u_1)$  enthalten. Da die Involutionen aus  $N_G(X)$  nicht-2-zentral in  $G$  sind und somit in einer  $\text{Alt}_7$ -Untergruppe von  $G$  liegen, folgt mit (4.14) die Behauptung für die Elemente vom Typ 2B, 4B und 6A.

Wir müssen also noch die Fusion für Elemente vom Typ 2A, 4A sowie 6B bestimmen.

Ist  $2A \in \text{ccl}_J(x_2)$ , so folgt mit (2.8) zunächst, daß 4A in  $J$  zu  $x_5$  oder zu  $x_6$  konjugiert ist; mit (4.10) folgt ferner  $6B \in \text{ccl}_J(x_{10})$ . Damit liegt also Fall (I) oder Fall (II) vor.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß  $2A \in \text{ccl}_J(x_3)$  ist. Nach (2.8) gilt dann  $4A \in \text{ccl}_J(x_7)$  und  $6B \in \text{ccl}_J(x_{11})$ .

Es sei nun  $\chi$  die Einschränkung eines komplexen irreduziblen Charakters von  $J$  auf  $G$ ; dann gilt offensichtlich  $\chi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots + c_{14}\psi_{14}$  mit nichtnegativen ganzen Zahlen  $c_i$ , wobei  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{14}\}$  die Menge der komplexen irreduziblen Charaktere von  $G \cong \text{Alt}_8$  ist. Die Werte von  $\chi$  auf den Klassen von  $G$  entnehmen wir jetzt der Charaktertafel von  $J$  und erhalten so ein Gleichungssystem für die Koeffizienten  $c_i$ ; dieses ist eindeutig lösbar, da die zugehörige Koeffizientenmatrix durch die Charaktertafel von  $G$  gegeben ist und somit regulär ist.

Wir können nun  $\chi$  so wählen, daß  $\chi(1) = 1333$  ist.

Wir erhalten nun durch Lösen des Gleichungssystems einen Widerspruch, da einige der Koeffizienten  $c_i$  doch nicht ganzzahlig sind; z.B. erhalten wir  $c_1 = 3/2$ .

Da die zur Lösung des Systems notwendigen Rechnungen alle elementar sind, verzichten wir an dieser Stelle darauf, sie dem Leser vorzuführen.

Q.E.D.

(4.17) Lemma. Für  $L_3(4) \cong G \leq J$  gilt das folgende Fusionsschema in  $J$ :

| 1A    | 2A    | 3A    | 4A    | 4B    | 4C    | 5A    | 5A(2) | 7A       | 7A*      |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_6$ | $x_6$ | $x_6$ | $x_8$ | $x_8$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ |

Beweis. Die angegebene Fusion für Elemente ungerader Ordnung in  $G$  folgt trivialerweise aus (2.8).

Ist nun  $2A \in \text{ccl}_J(x_2)$ , so folgt mit (4.8), daß 4A, 4B und 4C in  $\text{ccl}_J(x_6)$  liegen, da in  $G$  jedes Element der Ordnung vier in einem Sylow 3-Normalisator enthalten ist. Damit liegt dann die gewünschte Fusion vor.

Wir nehmen somit an, daß  $2A \in \text{ccl}_J(x_3)$  ist. Aus (2.8) folgt jetzt unmittelbar, daß 4A, 4B und 4C in  $\text{ccl}_J(x_7)$  enthalten sind. Jetzt erhalten wir ähnlich wie in (4.16) einen Widerspruch, indem wir wieder einen komplexen irreduziblen Charakter vom Grade 1333 von  $J$  auf  $G$  einschränken und dann zeigen, daß die Koeffizienten in der Linearkombination über  $\text{Char}(G)$  von diesem Charakter nicht alle nichtnegativ und ganzzahlig sind.

Q.E.D.

(4.18) Lemma. Es sei daran erinnert, daß die Gruppe  $G_0 = \langle u_1 u_6, u_1 s_2, a_3, (a_1)^2 [s, q_1]^2 v_3 v_4 d_2 t_2 \rangle$  isomorph zu  $L_2(11)$  ist und  $C_J(G_0) = C_H(G_0) = C_E(G_0) \cdot \langle a_1 \rangle \cong Q_8 \cdot Z_3$  ist.

Ist  $L_2(11) \cong G \leq J$ , so gilt eines der folgenden Fusionsschemata für  $G$  in  $J$ :

|       | 1A    | 2A    | 3A    | 6A       | 5A    | 5A(2) | 11A      | 11A*     |
|-------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|----------|----------|
| (I)   | $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_{10}$ | $x_8$ | $x_8$ | $x_{20}$ | $x_{20}$ |
| (II)  | $x_1$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_{11}$ | $x_8$ | $x_8$ | $x_{20}$ | $x_{20}$ |
| (III) | $x_1$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_{11}$ | $x_8$ | $x_8$ | $x_{19}$ | $x_{19}$ |

Ferner treten alle drei Fälle in  $J$  auf; im Falle (III) ist  $G \in \text{ccl}_J(G_0)$ .

Beweis. Sind die Elemente der Ordnung 11 aus  $G$  nicht 11-zentral in  $J$ , so folgt die Aussage in den Fällen (I) und (II) trivialerweise aus (2.8) und (4.10).

Wir nehmen jetzt an, daß die Elemente der Ordnung 11 aus  $G$  in  $J$  11-zentral sind und somit in  $\text{ccl}_J(x_{19})$  liegen. Die Fusion für 3A, 5A und 5A(2) ergibt sich unmittelbar aus (2.8) und ist wie in (III) angegeben.

Da  $u_1 u_6 = w_2 \in \text{ccl}_J(x_3)$  ist, liegt der Fall (III) offensichtlich für die Gruppe  $G_0$  vor. Wir beachten ferner, daß  $\zeta_G(2A, 3A, 11A) = 1$  ist; somit existieren Elemente  $x$  und  $y$  mit  $o(x) = 2$ ,  $o(y) = 3$  und  $o(xy) = 11$ . Offensichtlich gilt auch  $G = \langle x, y \rangle$ .

Wir nehmen nun an, daß (III) gilt. Wir wissen bereits, daß  $\zeta_J(x_3, x_4, x_{19}) = 25/24$  gilt. Da es ein Tripel  $(u, v, w)$  vom Typ  $(x_3, x_4, x_{19})$  gibt mit  $u^2 = v^3 = w^{11} = 1$  und  $uv = w$  sowie  $\langle u, v, w \rangle \cong L_2(32)$ , ist nun offensichtlich klar,



daß im Falle (III) stets  $G \in \text{ccl}_J(G_0)$  ist.

Wir betrachten abschließend den Fall, daß  $2A \in \text{ccl}_J(x_2)$  ist. Mit (4.10) erhalten wir dann  $6A \in \text{ccl}_J(x_{10})$  und somit das vollständige Fusionsschema für  $G$ . Ferner berechnen wir die verallgemeinerte Strukturkonstante in  $J$  für die Klassen von  $x_2, x_4$  und  $x_{19}$ ; es gilt  $\zeta_J(x_2, x_4, x_{19}) = 1/8$ .

Mit (3.18) sehen wir nun leicht, daß  $\langle 1 \rangle \neq C_J(G) \leq Q_8 \cdot Z_3$  gilt; wir können dann o.B.d.A. annehmen, daß  $G \leq H$  gilt. Da es in  $M_{22}$  nur eine Konjugiertenklasse von Untergruppen gibt, welche zu  $L_2(11)$  isomorph sind, können wir außerdem o.B.d.A. annehmen, daß  $E \cdot \langle a_1 \rangle \cdot G_0 = E \cdot \langle a_1 \rangle \cdot G$  ist. Wir setzen jetzt  $Y := E \cdot \langle a_1 \rangle \cdot G_0$  sowie  $\bar{Y} := Y / \langle u_1 \rangle$ .

Wir beachten, daß  $C_E(G_0) = Q_8$  und  $E = C_E(G_0) * E_0$  ist mit  $E_0 = [E, G_0] \cong \text{Ex}(2^{11})$ ; insbesondere ist  $Y' = E \cdot G_0$  und  $Y'' = E_0 \cdot G_0 \geq G$  sowie  $Y' = C_E(G_0) * Y''$ . Da  $G$  in  $J$  nicht zu  $G_0$  konjugiert ist und da es in  $H_0$  nur eine Klasse von zu  $L_2(11)$  isomorphen Untergruppen gibt, folgt  $C_J(G) = C_E(G_0)$ . Wir können nun o.B.d.A. annehmen, daß  $Z_{11} \cong \langle y \rangle \leq G \cap G_0$  und  $Z_5 \cong F \leq G \cap G_0$  ist mit  $N_G(\langle y \rangle) = \langle y \rangle \cdot F$ . Ferner gibt es Involutionen  $j$  und  $k$  aus  $Y''$  mit  $N_{G_0}(F) = F \cdot \langle j \rangle$  und  $N_G(F) = F \cdot \langle k \rangle$  sowie  $G_0 = \langle y, F, j \rangle$ ,  $G = \langle y, F, k \rangle$  und  $C_{E_0}(F) \cdot j = C_{E_0}(F) \cdot k$ ; dabei ist  $C_{E_0}(F) \cong Q_8$ . Ferner gilt  $k = e \cdot j$  mit einem Element  $e \in C_{E_0}(F)$ ; da  $G$  nicht in  $H_0$  enthalten ist, gilt  $e^2 = u_1$ . Mit  $k^2 = 1$  folgt nun  $e^j = e^{-1} = u_1 e$ ; da  $a_1$  die Gruppe  $C_{E_0}(F)$  normalisiert und außerdem  $\langle j \rangle$  zentralisiert, sehen wir nun, daß  $j$  jedes Element der Ordnung vier aus  $C_{E_0}(F)$  invertieren muß. Dies ist aber unmöglich.

Wir haben also insbesondere gezeigt, daß es in  $H$  genau

eine Konjugiertenklasse von Untergruppen gibt, welche zu  $L_2(11)$  isomorph sind und daß außerdem  $G_0$  ein Repräsentant dieser Klasse ist.

Wir betrachten nun  $\bar{Y}'$  und  $\bar{Y}'' = \bar{E}_0 \cdot \bar{G}_0 \approx E(2^{10}) \cdot L_2(11)$ . Offensichtlich operiert  $\bar{G}_0$  irreduzibel auf  $\bar{E}_0$ . Bekanntlich hat  $L_2(11)$  genau zwei irreduzible  $GF(2)$ -Moduln der Dimension 10; mit elementaren Rechnungen verifiziert man nun, daß  $\bar{E}_0$  isomorph zu der irreduziblen Sektion in dem 12-dimensionalen  $GF(2)$ -Permutationsmodul von  $L_2(11)$  ist. Insbesondere gilt dann  $H^1(\bar{G}_0, \bar{E}_0) \approx GF(2) \times GF(2)$ . Also gibt es in  $\bar{Y}''$  genau vier Konjugiertenklassen von Untergruppen, welche zu  $L_2(11)$  isomorph sind. Offensichtlich sind drei dieser Klassen unter  $\langle \bar{a}_1 \rangle$  konjugiert; damit ist schließlich klar, daß es in  $Y'' \cdot \langle a_1 \rangle$  und somit auch in  $H$  genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen gibt, welche zu  $SL_2(11)$  isomorph sind.

Da die Sylow 2-Untergruppen von  $SL_2(11)$  isomorph zu  $Q_8$  sind und da  $\zeta_G(x_2, x_4, x_{19}) = 1/8$  ist, gibt es dann in  $Y''$  ein Tripel  $(u, v, w)$  vom Typ  $(x_2, x_4, x_{19})$  mit  $uv = w$  und  $\langle u, v, w \rangle = Y''$ . Ferner sind sämtliche Untergruppen von  $J$ , welche von einem Tripel  $(a, b, c)$  vom Typ  $(x_2, x_4, x_{19})$  mit  $ab = c$  erzeugt werden, in  $J$  zu  $Y''$  konjugiert.

Mit Hilfe von (4.11) sehen wir jetzt noch leicht, daß die Fälle (I) und (II) in der Tat in  $J$  auftreten.

Q.E.D.

(4.19) Lemma. Für  $M_{11} \cong G \leq J$  gilt das folgende Fusionsschema in  $J$  :

| 1A    | 2A    | 3A    | 4A    | 5A    | 6A       | 8A       | 8A*      | 11A      | 11A*     |
|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_6$ | $x_8$ | $x_{10}$ | $x_{16}$ | $x_{16}$ | $x_{20}$ | $x_{20}$ |

Beweis. Da  $G$  Elemente der Ordnung acht enthält und nur eine Klasse von Involutionen hat, folgt aus (2.8) sofort  $2A \in \text{cccl}_J(x_2)$ . Wir beachten nun, daß es in  $G$  Untergruppen gibt, welche zu  $L_2(11)$  isomorph sind, und daß ein Sylow 3-Normalisator von  $G$  isomorph zu  $E(3^2) \cdot \text{SD}_{16}$  ist. Nun folgt die Behauptung unmittelbar aus (4.18), (4.12) und (2.8).

Q.E.D.

(4.20) Lemma. Für  $M_{12} \cong G \leq J$  gilt eines der folgenden Fusionsschemata in  $J$  :

|      | 1A    | 2A    | 2B    | 3A    | 3B    | 4A    | 4B    | 5A    | 6A       | 6B       | 8A       | 8B       | 10A      | 11A      | 11A*     |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| (I)  | $x_1$ | $x_2$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_6$ | $x_6$ | $x_8$ | $x_{10}$ | $x_{10}$ | $x_{16}$ | $x_{16}$ | $x_{17}$ | $x_{20}$ | $x_{20}$ |
| (II) | $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_6$ | $x_6$ | $x_8$ | $x_{11}$ | $x_{10}$ | $x_{16}$ | $x_{16}$ | $x_{18}$ | $x_{20}$ | $x_{20}$ |

Ferner treten beide Fälle in  $J$  auf.

Außerdem gilt  $(4A)^2 \sim (4B)^2 \sim 2B$ ,  $(8A)^2 \sim 4A$ ,  
 $(8B)^2 \sim 4B$ ,  $(6A)^2 \sim 3B$ ,  $(6A)^3 \sim 2A$ ,  $(6B)^2 \sim 3A$  sowie  
 $(6B)^3 \sim 2B$  in  $G$ .

Beweis. Die Aussage über die Fusion der Potenzen von Elementen in  $G$  entnehmen wir einer Arbeit von McKay [40].

In  $G$  gibt es bekanntlich genau zwei konjugierten Klassen von Untergruppen, welche zu  $M_{11}$  isomorph sind; es seien  $G_1$  und  $G_2$  Repräsentanten dieser beiden Klassen. Dann gilt  $G_1 \cap G_2 \cong L_2(11)$ . Wir können somit o.B.d.A. annehmen, daß  $G_1$  Elemente vom Typ 8A und 4A enthält, während  $G_2$  Elemente vom Typ 8B und 4B enthält. Nach (4.19) ist damit die Fusion bestimmt für sämtliche Elemente in  $G$  ausgenommen jene vom Typ 2A, 6A und 10A.

Wir beachten, daß  $G$  eine maximale Untergruppe hat, welche zu  $L_2(11)$  isomorph ist; diese Untergruppe enthält Elemente vom Typ 2A und 6A. Mit (4.18) und (2.8) sehen wir nun leicht, daß damit die Fusion der Elemente von  $G$  in  $J$  bestimmt ist und der in (I) oder (II) angegebenen entspricht.

Aus (4.11) folgt schließlich noch, daß sowohl Fall (I) als auch Fall (II) in  $J$  auftritt.

Q.E.D.

(4.21) Lemma. Für  $M_{22} \approx G \leq J$  gilt das folgende Fusionschema in  $J$  :

| 1A    | 2A    | 3A    | 4A    | 4B    | 5A    | 6A       | 7A       | 7A*      | 8A       | 11A      | 11A*     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_6$ | $x_6$ | $x_8$ | $x_{10}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{16}$ | $x_{20}$ | $x_{20}$ |

Dabei ist  $(8A)^2 \sim 4A$  in  $G$ .

Beweis. Da  $G$  Elemente der Ordnung acht enthält, folgt aus (2.8) zunächst  $2A \in \text{ccp}_J(x_2)$ ; ebenso einfach bestimmt man die Fusion für Elemente der Ordnung drei, fünf und sieben in  $G$ . Da  $G$  eine zu  $L_2(11)$  isomorphe Untergruppe enthält, folgt mit (4.18) nun  $11A \sim 11A^* \sim x_{20}$  sowie  $6A \sim x_{10}$  in  $J$ .

Bekanntlich enthält  $G$  eine Untergruppe  $G_1 \approx L_3(4)$ . Da  $|G : G_1| = 22$  ist, enthält  $G_1$  offensichtlich Elemente vom Typ  $4A$ . Wir beachten, daß  $G$  einen komplexen irreduziblen Charakter  $\chi$  vom Grade 55 hat; für  $\chi_0 := \chi|_{G_1}$  gilt dann  $\chi_0 = \psi_1 + \psi_2$  mit irreduziblen Charakteren  $\psi_1$  und  $\psi_2$  von  $G_1$  mit den Graden 20 und 35. Nun verifiziert man leicht, daß  $G_1$  auch Elemente vom Typ  $4B$  enthält. Mit (4.17) folgt jetzt  $4A \sim 4B \sim x_6$  in  $J$ .

Somit ist die Fusion nur noch für Elemente vom Typ  $8A$  zu bestimmen; nach (2.8) sind diese Elemente in  $J$  zu  $x_{16}$  oder zu  $x_{16}$  konjugiert.

Nun zeigen wir daß  $8A$  in  $J$  zu  $x_{16}$  konjugiert ist, indem wir einen komplexen irreduziblen Charakter vom Grade 1333 von  $J$  auf  $G$  einschränken und im anderen Falle dann ähnlich wie in (4.16) einen Widerspruch herleiten.

Q.E.D.

(4.22) Lemma. Für  $L_2(23) \cong G \leq J$  gilt eines der folgenden Fusionsschemata in  $J$  :

|      | 1A    | 2A    | 3A    | 4A    | 6A       | 12A      | 12A(5)   | 11A(j)   | 23A      | 23A*     |
|------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| (I)  | $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_6$ | $x_{10}$ | $x_{21}$ | $x_{21}$ | $x_{20}$ | $x_{36}$ | $x_{36}$ |
| (II) | $x_1$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_7$ | $x_{11}$ | $x_{23}$ | $x_{23}$ | $x_{20}$ | $x_{36}$ | $x_{36}$ |

Dabei ist  $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ . Außerdem treten beide Fälle in  $J$  auf.

Beweis. Mit (3.19) und (3.18) sehen wir zunächst, daß Elemente der Ordnung 23 aus  $G$  in  $\text{ccl}_J(x_{36})$  liegen und daß Elemente der Ordnung 11 aus  $G$  in  $\text{ccl}_J(x_{20})$  enthalten sind. Nach (2.8) sind Elemente der Ordnung 12 aus  $G$  in  $J$  konjugiert zu genau einem Element aus  $\{x_{21}, x_{22}, x_{23}\}$ . Offensichtlich gilt Fall (I), falls  $12A \in \text{ccl}_J(x_{21})$  ist; gilt  $12A \in \text{ccl}_J(x_{23})$ , so erhalten wir Fall (II).

Wir nehmen nun an, daß  $12A \sim x_{22}$  ist in  $J$ . Nach (2.8) gilt dann ferner  $2A \sim x_2$ ,  $3A \sim x_4$ ,  $4A \sim x_5$  und  $6A \sim x_{10}$  in  $J$ . Wir schränken nun wiederum einen komplexen irreduziblen Charakter vom Grade 1333 von  $J$  auf  $G$  ein und erhalten ähnlich wie in (4.16) einen Widerspruch.

Aus (4.11) folgt schließlich noch, daß die Fälle (I) und (II) in der Tat in  $J$  auftreten.

Q.E.D.

(4.23) Lemma. Für  $U_3(3) \cong G \leq J$  gilt das folgende Fusionschema in  $J$  :

| 1A    | 2A    | 3A    | 3B    | 4A    | 4A*   | 4C    | 6A       | 7A       | 7A*      | 8A       | 8A*      | 12A      | 12A*     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_{10}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{15}$ | $x_{15}$ | $x_{22}$ | $x_{22}$ |

Dabei gilt  $(6A)^2 \sim 3A$  ,  $(8A)^2 \sim 4A$  ,  $(12A)^3 \sim 4A^*$  in  $G$  .

Beweis. Da  $G$  Elemente der Ordnung acht enthält und außerdem nur eine Klasse von Involutionen hat, sind diese offensichtlich in  $\text{cc}_J(x_2)$  enthalten. Ferner folgt aus (2.8) unmittelbar die Fusionsaussage für Elemente ungerader Ordnung in  $G$  . Da ein Sylow 3-Normalisator in  $G$  isomorph zu  $\text{Ex}(3^3) \cdot Z_8$  ist, folgt aus (4.7), daß  $8A \sim 8A^* \sim x_{15}$  und  $4A \sim 4A^* \sim x_5$  in  $J$  gilt. Mit (2.8) erhalten wir damit schließlich  $12A \sim 12A^* \sim x_{22}$  sowie  $6A \sim x_{10}$  in  $J$  .

Wir müssen nun also noch die Fusion für Elemente vom Typ 4C bestimmen. Nach (2.8) gibt es ein  $y \in \{x_5, x_6\}$  derart, daß  $4C \sim y$  gilt in  $J$  .

Wir nehmen jetzt an, daß  $y = x_5$  ist. Nun schränken wir wieder einen komplexen irreduziblen Charakter vom Grade 1333 von  $J$  auf  $G$  ein und erhalten dann ähnlich wie in (4.16) einen Widerspruch.

Q.E.D.

(4.24) Bemerkungen. (a) Die in (4.1) aufgeführten nichtabelschen einfachen Gruppen sind mit der möglichen Ausnahme von  $U_3(3)$  in der Tat als Untergruppen in  $J$  involviert.

(b) Bei der Bestimmung des Fusionsschemas für eine einfache Untergruppe  $G$  von  $J$  in den Lemmata (4.13) - (4.23) haben wir gelegentlich einen irreduziblen komplexen Charakter vom Grade 1333 von  $J$  auf  $G$  eingeschränkt. Es sei darauf hingewiesen, daß dieses Verfahren mit anderen irreduziblen Charakteren von  $J$  keine Verbesserung der Resultate in den oben angesprochenen Lemmata liefert.



## §5 MAXIMALE 2-LOKALE UNTERGRUPPEN

Wir wollen uns in diesem Paragraphen eine Übersicht über die 2-lokalen Untergruppen von  $J$  verschaffen. Es sei daran erinnert, daß

$$\begin{aligned} H &= N_J(E) = C_J(u_1) = E * H_0 \cong \text{Ex}(2^{13}) * \widehat{6}\text{Aut}(M_{22}), \\ K &= N_J(R) = N_J(Z(R)) \cong \text{Spec}(2^{3+12}) \setminus [\text{Sym}_5 \times L_3(2)], \\ L &= N_J(V) = V \cdot L_0 \cong E(2^{10}) \cdot L_5(2) \quad \text{und} \\ M &= N_J(U) = U \cdot M_0 \cong E(2^{11}) \cdot M_{24} \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Unser Ziel in diesem Paragraphen ist der Beweis von folgendem Satz.

(5.1) Theorem. Jede 2-lokale Untergruppe von  $J$  ist in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H$ ,  $K$ ,  $L$  oder  $M$  konjugiert.

Der Beweis des Theorems wird in mehreren Abschnitten erfolgen. Offensichtlich genügt es, die Behauptung für Normalisatoren von elementar-abelschen 2-Gruppen in  $J$  zu beweisen.

(5.2) Lemma. Ist  $X$  eine elementar-abelsche 2-Gruppe in  $J$  der Ordnung  $2^n$  mit  $n \geq 10$ , so ist  $N_J(X)$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $L$  oder  $M$  konjugiert.

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß  $X \leq S$  ist. Nach (3.4) und (3.8) folgt dann  $C_J(X) \in \{V, W, U\}$ . Mit  $W^S = V$  erhalten wir nun die Behauptung.

Q.E.D.

(5.3) Lemma. Wir setzen  $y = s \cdot a_2 \cdot s$  und außerdem

$P_1 = \langle u_1, u_2, u_4, r_0, r_2, d_2, r_1, r_3, s_2 \rangle$  sowie

$P_2 = \langle u_1, u_2, u_4, r_0, r_2, d_2, u_3r_1, u_5r_3, u_6s_2 \rangle$ .

Dann gilt folgendes:

(a) Es ist  $C_S(P_i) = P_i \cong E(2^9)$  und  $N_S(P_i) = U_1 \cdot T = R \cdot (\langle d_1, s_1, t_1 \rangle \times \langle t_2 \rangle)$  für  $i \in \{1, 2\}$ . Ferner gilt  $(P_1)^Y = U_1 < U$  und  $(C_J(P_1))^Y = U$  sowie  $(P_2)^Y = U_0 \cdot \langle v_1, v_2, v_3 \rangle < V$  und  $(C_J(P_2))^Y = V$ .

(b) Ist  $X$  eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung  $2^9$  in  $S$ , so ist entweder  $X \in \text{ccl}_S(P_i)$  für ein  $i \in \{1, 2\}$  oder  $X < Y$  für ein  $Y \in \{U, V, W\}$ .

In jedem Falle ist  $N_J(X)$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $L$  oder  $M$  konjugiert.

Beweis. Die Behauptungen unter (a) verifizieren wir leicht mit Hilfe der Relationen aus (3.2) - (3.4) und der Tatsache, daß für  $Y \in \{U, V\}$  die Involutionen aus  $N_J(Y) - Y$  höchstens eine Gruppe der Ordnung  $2^7$  in  $Y$  zentralisieren.

Die Behauptungen in (b) folgen nun, wenn wir zeigen, daß jede elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung  $2^9$  von  $S$ , welche weder in  $U$  noch in  $V$  oder  $W$  enthalten ist, unter  $S$  zu  $P_1$  oder zu  $P_2$  konjugiert ist. Wir nehmen daher im folgenden an, daß  $E(2^9) \cong X \leq S$  ist und daß es kein  $Y$  aus  $\{U, V, W\}$  gibt mit  $X \leq Y$ .

Wir setzen nun  $X_0 = X \cap U$ ; ferner sei  $Y$  eine elementar-abelsche Untergruppe von  $T$  derart, daß  $UX = U \cdot Y$  ist. Da  $T$  vom Typ  $L_5(2)$  ist und da  $C_S(C_U(r)) = U \cdot \langle r \rangle$  sowie

$C_U(r) \cong E(2^7)$  ist für Involutionen  $r$  aus  $S - T$ , ist dann offensichtlich  $X_0 \cong E(2^n)$  und  $Y \cong E(2^{9-n})$  mit  $3 \leq n \leq 6$ .

Wir nehmen nun zunächst an, daß  $X$  in  $UE_2$  enthalten ist. Da für zwei verschiedene, nichttriviale Elemente  $e_1$  und  $e_2$  aus  $E_2$  stets  $C_U(e_1, e_2) = C_U(E_2) = U_0$  ist, folgt dann  $X_0 \leq U_0$ . Ist nun  $1 \neq e \in E_2 \cap Y$  und  $u \in U$  mit  $ue \in X$ , so gilt  $u \in C_U(e) = U_0 \cdot \langle e \cdot e^S \rangle$ ; somit können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $u \in U_0$  ist. Dann ist wegen  $U_0 = Z(UE_2)$  also  $X \leq C_{UE_2}(e) = C_U(e) \cdot E_2 = W \cdot \langle e^S \rangle$ . Da  $(C_W(e^S))^S = C_V(e)$  ist, folgt dann  $X \leq W$ ; dies ist ein Widerspruch zur Wahl von  $X$ . Wir haben damit gezeigt, daß  $X$  nicht in  $UE_2$  enthalten ist.

Wir nehmen nun an, daß  $X_0 \cong E(2^6)$  ist. Da für Involutionen  $r \in S - U$  mit  $C_U(r) \cong E(2^6)$  stets  $C_5(C_U(r)) = U\langle r \rangle$  ist, folgt dann  $C_U(j) \cong E(2^7)$  für Involutionen  $j \in Y$ . Somit enthält  $Y$  nur Involutionen, welche in  $M$  konjugiert sind zu Elementen in  $U \cdot r_0$ . Da  $S$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_M(r_0 \bmod U) \cong U \cdot E_1 E_2 \cdot A_0$  ist, können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $r_0 \in Y$  ist. Wir haben bereits im Beweis von (3.30) gesehen, daß die Elemente  $Ur_0, Ur_1, Ur_2, Ur_3$  und  $Ur_3 d_1$  Repräsentanten der Klassen von Involutionen in der Gruppe  $UE_1 E_2 A_0 / U$  sind, welche in  $M/U$  2-zentral sind; außerdem ist  $Ur_0 r_3$  nicht 2-zentral in  $M/U$ . Aus (3.4) erhalten wir  $C_U(r_0, r_1) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, v_1 r_0 \rangle \cong E(2^5)$  und  $C_U(r_0, r_1 r_3 d_1) = \langle u_1, u_2, w_1, u_5, v_1 r_0 \rangle \cong E(2^5)$ , wobei  $s_2 \in T$  ist mit  $s_2: r_0 \rightarrow r_0, r_3 d_1 \rightarrow r_1 r_3 d_1$ . Da  $X_0 \cong E(2^6)$  ist, folgt nun, daß  $X$  unter  $UE_1 E_2 A_0$  zu einer Untergruppe von  $UE_2$  konjugiert ist. Wir haben bereits gezeigt, daß dies nicht möglich ist.

Wir nehmen nun an, daß  $X_0 \cong E(2^5)$  und  $Y \cong E(2^4)$  ist. Mit Hilfe von (3.4) berechnen wir nun die folgenden Zentralisatoren:  $C_U(E_1) = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 r_0 \rangle \cong E(2^4)$ ,  $C_U(r_0, r_1, r_3 d_1, t_1 s_2) = \langle u_1, u_2, w_1, v_1 r_0 \rangle \cong E(2^4)$ ,  $C_U(r_0, r_2, r_3 d_1, r_1 r_3 s_1) = \langle u_1, u_2 w_1, u_3 u_5 \rangle \cong E(2^3)$  und  $C_U(r_1, r_3, d_1, s_1) = \langle u_1, v_1 r_0, v_2 r_2 \rangle \cong E(2^3)$ . Da  $X$  nicht in  $UE_2$  enthalten ist, folgt mit (3.30) nun, daß es in  $Y$  Involutionen gibt, deren Bilder in  $M/U$  nicht-2-zentral sind.

Wir setzen jetzt  $T_1 = R_1 R_2 \cdot \langle t_1 t_2 \rangle$ . Da  $U \cdot T_1$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_M(r_1 r_2 \bmod U)$  ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $r_1 r_2 \in Y \leq C_T(r_1 r_2) = T_1$  ist. Mit (3.4) berechnen wir  $C_U(r_0, r_1 r_2, t_1 t_2) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 u_5 v_1 r_0 \rangle$ . Da  $\langle r_0, r_1 r_2, d_1, t_1 t_2 \rangle$  und  $\langle r_0, r_1 r_2, d_2, t_1 t_2 \rangle$  Repräsentanten der Klassen von  $E(2^4)$ -Untergruppen in  $T_1$  sind, welche nicht in  $R_1 R_2$  enthalten sind, folgt damit also  $Y \leq R_1 R_2$ . Da jede elementar-abelsche Untergruppe von  $R_1 R_2$  in  $R_1$  oder in  $R_2$  liegt, gibt es dann ein  $i \in \{1, 2\}$  mit  $Y \leq R_i$ . Da sowohl  $C_U(r_1 r_2)$  als auch  $R_1$  in  $E \cong Ex(2^{13})$  enthalten sind und da  $C_U(R_1) = \langle u_1 \rangle \cong Z_2$  ist, folgt dann offensichtlich  $Y \leq R_2$ .

Es ist klar, daß  $Y \cap \langle r_0, r_2, d_2 \rangle \neq \langle 1 \rangle$  ist. Wir beachten ferner, daß  $C = \langle d_1, s_1, t_1 t_2 \rangle \leq T_1$  ist, wobei  $\text{ccl}_C(d_2) = d_2 \langle r_0, r_2 \rangle$  und  $\text{ccl}_C(r_2) = r_2 \langle r_0 \rangle$  gilt. Da nun  $C_U(r_1 r_2, d_2) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle \cong E(2^4)$  ist, können wir also o.B.d.A. annehmen, daß es ein  $r \in \{r_0, r_2\}$  gibt mit  $r \in Y$ . Es ist  $C_U(r_1 r_2, r_0) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 v_1 r_0 \rangle \cong E(2^5)$  und  $C_U(r_1 r_2, r_2) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, v_2 r_2 \rangle \cong E(2^5)$ . Da nun aber  $Y \leq C_{R_2}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \langle r_0, r_1, r_2, d_2 \rangle$  und andererseits  $X_0 \leq C_U(Y) = C_U(r_0, r_1, r_2, d_2) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle \cong E(2^4)$

ist, haben wir schließlich einen Widerspruch erhalten.

Wir haben bisher also gezeigt, daß  $X_0 \approx E(2^n)$  und  $Y \approx E(2^{9-n})$  mit  $n \in \{3,4\}$  ist.

Da  $C_U(r_0, r_1, t_1, d_2, s_2) = \langle u_1, u_2 \rangle \approx E(2^2)$  und da  $C_U(r_0, r_2, t_2, d_1, s_1) = \langle u_1, u_3, u_4, u_5 \rangle \approx E(2^3)$  ist, folgt aus (3.30) nun, daß es ein  $i \in \{1,2\}$  gibt mit  $Y \leq R_i$ . Da  $Y \cap \langle r_1, r_2, r_0, r_1, r_3 \rangle \neq \langle 1 \rangle$  ist, folgt  $X_0 \leq C_U(Y) \leq U \cap E$ . Wir wissen ferner, daß  $R_1 \leq E$  ist mit  $C_U(R_1) = \langle u_1 \rangle \approx Z_2$ ; damit folgt dann  $i = 2$  und  $Y \leq R_2$ .

Wir nehmen nun an, daß  $Y \approx E(2^5)$  und somit  $X_0 \approx E(2^4)$  ist. Offensichtlich ist  $Y \cap \langle r_0, r_2, d_2 \rangle \geq \langle e_1, e_2 \rangle \approx E(2^2)$  und  $Y \cap \langle r_1, r_3, s_2 \rangle \geq \langle k_1, k_2 \rangle \approx E(2^2)$ . Da  $L_3(2) \approx L_2 \leq M$  ist und  $\langle r_0, r_2, d_2 \rangle$  und  $\langle r_1, r_3, s_2 \rangle$  normalisiert, können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $Y \geq \langle e_1, e_2, r_1, r_3 \rangle$  ist. Damit folgt  $X_0 \leq C_U(Y) \leq C_U(e_1, e_2, r_1, r_3) = C_U(E_2, r_1, r_3) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$ . Da aber andererseits  $X_0 \approx E(2^4)$  ist, haben wir einen Widerspruch erhalten.

Wir haben gezeigt, daß  $Y = R_2 \approx E(2^6)$  und damit auch  $X_0 = C_U(Y) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$  ist.

Es seien nun für  $j \in \{0,1,\dots,5\}$  Elemente  $x_j$  aus  $U$  so gewählt, daß  $E(2^6) = \langle x_0, r_0, x_1, r_1, x_2, r_2, x_3, r_3, x_4, d_2, x_5, s_2 \rangle$  in  $X$  enthalten ist. Sind nun  $y_1, y_2 \in U$  und  $z_1, z_2 \in R_2$  derart, daß  $y_1 z_1$  und  $y_2 z_2$  in  $X$  enthalten sind, so gilt  $[y_1, z_2] = [y_2, z_1]$ ; diese Tatsache werden wir im folgenden benutzen, um die  $x_i$  zu bestimmen.

Da  $[U, r_0] = \langle u_1, u_2, u_3, v_1, r_0 \rangle$  und  $[u_6, r_3, s_1] = u_5$  ist sowie  $UX = UR_2 \not\leq S$  und  $X_0 \not\leq S$ , können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $x_0 \in \{1, u_5, u_6\}$  ist. Mit  $[u_6, r_3] = u_4$  und

$[u_5, s_2] = u_4$  folgt wegen  $u_4 \notin [U, r_0]$  dann  $x_0 = 1$ .

Nun ist klar, daß  $x_j \in C_U(r_0) = X_0 \cdot \langle u_3, u_5, u_6, v_1 r_0 \rangle$  ist für  $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ . Insbesondere können wir annehmen, daß  $x_2, x_4 \in \langle u_3, u_5, u_6 \rangle$ ,  $x_1 \in \langle u_3, v_1 r_0 \rangle$  sowie  $x_3 \in \langle u_5, v_1 r_0 \rangle$  und  $x_5 \in \langle u_6, v_1 r_0 \rangle$  ist.

Mit (3.4) sehen wir jetzt, daß  $[x_2, s_2] = [x_5, r_2] = 1$  und somit  $x_2 \in \langle u_6 \rangle$  sowie  $x_5 \in \langle u_6 \rangle$  ist. Damit folgt nun wiederum  $[x_1, r_2] = [x_2, r_1] = 1$ ; dies impliziert dann  $x_2 = 1$  und  $x_1 \in \langle u_3 \rangle$ . Ferner erhalten wir  $[x_4, s_2] = [x_5, d_2] = 1$  und  $[x_4, r_1] = [x_1, d_2] = 1$ ; daraus folgt dann  $x_4 = 1$ . Wegen  $[x_3, r_2] = [x_3, d_2] = 1$  erhalten wir schließlich auch noch  $x_3 \in \langle u_5 \rangle$ .

Wir haben also gezeigt, daß o.B.d.A.  $x_0 = x_2 = x_4 = 1$  und  $x_1 \in \langle u_3 \rangle$ ,  $x_3 \in \langle u_5 \rangle$  und  $x_5 \in \langle u_6 \rangle$  ist. Nun beachte man, daß  $[u_3, r_3] = [u_5, r_1] = u_1$ ,  $[u_3, s_2] = [u_6, r_1] = u_2$  und  $[u_5, s_2] = [u_6, r_3] = u_4$  ist. Damit folgt schließlich, daß  $(x_1, x_3, x_5) \in \{(1, 1, 1), (u_3, u_5, u_6)\}$  ist; somit gilt dann auch  $x \in \{P_1, P_2\}$ .

Q.E.D.

(5.4) Lemma. Wir setzen  $Q_1 = C_U(r_0) \times \langle r_0 \rangle$  und  $Q_2 = C_U(E_1) \times E_1 = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 r_0, r_0, r_1, d_1, t_1 \rangle$ ; dann gilt folgendes:

(a) Für  $i \in \{1, 2\}$  ist  $C_J(Q_i) = Q_i \cong E(2^8)$  sowie  $N_J(Q_1) = U \cdot E_1 E_2 \cdot A_0 \leq M$  und  $N_J(Q_2) = V \cdot E_1 \cdot A_1 \leq L$ .

(b) Ist  $X$  eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung  $2^8$  von  $J$ , so liegt einer der folgenden beiden Fälle vor:

(1)  $C_J(X)$  ist in  $J$  zu  $U$  oder zu  $V$  konjugiert;

(2)  $X$  ist in  $J$  zu  $Q_1$  oder zu  $Q_2$  konjugiert.

In jedem Falle ist  $N_J(X)$  zu einer Untergruppe von  $L$  oder  $M$  konjugiert.

Beweis. (a) Die Aussagen über  $Q_1$  entnehmen wir (3.8). Dem Beweis von (3.27) entnehmen wir ferner, daß außerdem  $C_J(u_1, u_2, u_3) = U \cdot E_1 E_2$  ist; daraus folgt nun mittels (3.4)  $C_J(Q_2) = Q_2 \cong E(2^8)$ . Da  $N_{L_0}(E_1) = E_1 \cdot A_1$  und  $[V, E_1] = C_V(E_1)$  sowie  $Q_2 = C_V(E_1) \times E_1$  ist, folgt  $V \cdot E_1 \cdot A_1 \leq N_J(Q_2)$ . Wir wissen, daß  $V \cdot T \in \text{Syl}_2(V E_1 A_1)$  und  $N_J(V \cdot T) = S$  ist; somit ist dann  $V \cdot T \in \text{Syl}_2(N_J(Q_2))$ . Offensichtlich kann  $N_J(Q_2)$  keine Elemente der Ordnung 31 enthalten; eine Inspektion der Ordnung von  $\text{GL}_8(2)$  liefert dann, daß  $|N_J(Q_2)|$  ein Teiler von  $2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$  ist. Da  $|V E_1 A_1| = 2^{20} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$  ist und da  $A_1 \cong \text{Alt}_8$  irreduzibel auf  $V E_1 / Q_2 \cong E(2^6)$  operiert, folgt schließlich  $N_J(Q_2) = V \cdot E_1 \cdot A_1$ .

(b) Wir können o.B.d.A. annehmen, daß  $X \cong E(2^8)$  in  $M$  enthalten ist und daß  $C_J(X)$  in  $J$  weder zu  $U$  noch zu  $V$  konjugiert ist. Offensichtlich ist  $C_J(X)$  eine 2-Gruppe; mit (5.3) folgt dann  $\Omega_1(C_J(X)) = X$ . Wir setzen nun  $X_0 = X \cap U$ ; ferner sei  $Y$  eine Untergruppe von  $M$  derart, daß  $UX = U \cdot Y$  ist. Nun ist klar, daß  $X_0 = C_U(X) = C_U(Y)$  ist.

Ist  $Y \cong Z_2$ , so ist offensichtlich  $X \in \text{ccl}_M(Q_1)$ ; wir können somit o.B.d.A. annehmen, daß  $Y \cong E(2^n)$  ist mit einem geeigneten  $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ . Da  $C_U(R_1) = \langle u_1 \rangle \cong Z_2$  und  $C_U(R_2) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle \cong E(2^3)$  ist, folgt wegen  $C_U(Y) = X_0$  dann sofort  $n \leq 5$ .

Wir nehmen nun zunächst an, daß  $n = 2$  ist. Aus (3.8.a) folgt sogleich, daß alle Involutionen aus  $UX/U$  2-zentral in  $M/U$  sind. Wir haben bereits im Beweis von (5.3) festgestellt, daß  $U\langle r_0, r_1 \rangle/U$ ,  $U\langle r_0, r_2 \rangle/U$  und  $U\langle r_0, r_1 r_3 d_1 \rangle/U$  Repräsentanten der konjugierten Klassen von Vierergruppen in  $M/U$  sind, welche nur 2-zentrale Involutionen aus  $M/U$  enthalten. Da  $C_U(r_0, r_1) \cong C_U(r_0, r_1 r_3 d_1) \cong E(2^5)$  ist, folgt dann also o.B.d.A.  $Y = \langle r_0, r_2 \rangle$  und  $X_0 = C_U(r_0, r_2) = U_0$ . Nun sehen, wir leicht, daß entweder  $X = U_0 \cdot \langle r_0, r_2 \rangle \leq W = V^8$  oder  $X = U_0 \cdot \langle v_1 r_0, v_2 r_2 \rangle \leq U$  ist; in beiden Fällen haben wir einen Widerspruch hergeleitet. Damit folgt dann  $n \geq 3$ .

Wir nehmen nun an, daß  $n = 5$  ist. Ist  $Y \leq R_1$ , so ist  $Y \cap \langle r_1 r_2, r_0 r_1 r_3 \rangle \neq \langle 1 \rangle$ ; da  $a_1 \in N_M(E)$  transitiv auf  $\langle r_1 r_2, r_0 r_1 r_3 \rangle^*$  operiert und da sowohl  $C_U(r_1 r_2)$  als auch  $R_1$  in  $E$  enthalten ist, folgt aus  $X_0 = C_U(Y)$  dann  $C_U(R_1) \geq E(2^2)$ . Dies widerspricht jedoch  $C_U(R_1) = \langle u_1 \rangle$ .



Wir haben also gezeigt, daß  $Y$  nicht in  $R_1$  enthalten ist. Ferner beachten wir, daß  $C_U(r_0, r_1, t_1, d_2, s_2) = \langle u_1, u_2 \rangle$  ist und daß  $\langle r_0, r_2, t_2, d_1, s_1 \rangle$  unter dem Element  $a_3 \in M$  zu  $\langle r_0, r_2, d_2, r_1, r_3 \rangle < R_2$  konjugiert ist; nach (3.30.a) können nun also o.B.d.A. annehmen, daß  $Y < R_2$  ist. Offensichtlich gilt dann auch  $X_0 = C_U(Y) = C_U(R_2) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$ .

Da  $L_2 \times \langle t_2 \rangle \leq N_M(R_2)$  ist, können wir ferner o.B.d.A. annehmen, daß  $Y = Y_0 \times \langle d \rangle$  ist mit  $Y_0 = \langle r_0, r_1, r_2, r_3 d_2 \rangle$  und  $d \in \{d_2, s_2\}$ . Es seien nun Elemente  $x_i$  ( $0 \leq i \leq 4$ ) aus  $U$  so gewählt, daß  $X \geq \langle x_0 r_0, x_1 r_1, x_2 r_2, x_3 r_3 d_2, x_4 d \rangle$  ist. Da  $C_U(r_0) = [U, r_0] \langle u_4 \rangle \times \langle u_5, u_6 \rangle$  ist, können wir auch noch annehmen, daß  $x_0 \in \langle u_5, u_6 \rangle$  ist. Damit folgt dann  $x_2 \in U_0$ ; da  $[u_5 u_6, r_3 d_2] = [u_6, r_3 d_2] = [u_6, r_3] = u_4 \notin [U, r_0]$  ist, gilt dann sogar  $x_0 \in \langle u_5 \rangle$ . Mit  $[x_1, r_2] = [x_2, r_1]$  und  $[U_0, r_1] = \langle u_1, u_2 \rangle$  sowie  $[U, r_2] = \langle u_1, u_4, u_5, v_2 r_2 \rangle$  folgt dann  $[x_1, r_2] = [x_2, r_1] \in \langle u_1 \rangle$  und damit schließlich auch o.B.d.A.  $x_2 \in \langle u_3, u_5 \rangle$ . Somit gilt  $[x_3, r_2] = [x_2, r_3 d_2] = [x_2, r_3] \in \langle u_1 \rangle$ . Offensichtlich ist  $[x_3, r_0] = [x_0, r_3 d_2] = 1$  und damit  $x_3 \in C_U(r_0, r_3 d_2) = X_0 \langle u_5 \rangle$ ; also gilt o.B.d.A.  $x_3 \in \langle u_5 \rangle$ . Damit erhalten wir dann  $[x_2, r_3 d_2] = 1$  und somit auch  $x_2 \in \langle u_5 \rangle$ . Wir haben bisher also gezeigt, daß die Elemente  $x_0, x_2$  und  $x_3$  in  $\langle u_5 \rangle$  enthalten sind. Dann sind die Elemente  $[x_1, r_0]$ ,  $[x_1, r_2]$  und  $[x_1, r_3 d_2]$  alle in  $\langle u_1 \rangle$  enthalten; mit den Relationen aus (3.4) folgt nun, daß o.B.d.A.  $x_1 \in \langle u_3 \rangle$  ist. Damit gilt dann  $[x_0, r_1] = 1$  und  $[x_2, r_1] = 1$ ; dies impliziert  $x_0 = x_2 = 1$ . Somit gilt dann auch  $x_4 \in C_U(r_0, r_2, d) \leq U_0$ . Wir haben gezeigt, daß insbesondere  $X \leq U_0 \cdot R_2$  ist. Setzen wir  $y = sa_2$  und  $\bar{X} = X^y$ , so gilt dann  $\bar{X} \leq V \langle r_0, r_2, d_2 \rangle$  mit  $|V\bar{X} : V| \geq 4$ . Nun

haben wir aber eine ähnliche Situation bereits im Beweis von (5.3) untersucht; ebenso wie dort erhalten wir  $\bar{X} \leq W = V^S$  oder  $\bar{X} \leq U^* \leq U$ . Wir haben damit einen Widerspruch zu der Tatsache hergeleitet, daß  $X = \Omega_1(C_J(X))$  ist. Es gilt also insbesondere  $n \in \{3, 4\}$ .

Wir nehmen nun an, daß  $Y$  Involutionen enthält, deren Bilder in  $M/U$  nicht-2-zentral sind. Wir setzen daher  $T_1 = R_1 R_2 \cdot \langle t_1, t_2 \rangle$  und nehmen o.B.d.A. an, daß  $r_1 r_2 \in Y \leq T_1$  ist. Ferner ist dann  $E(2^4) \leq X_0 < C_U(r_1 r_2) \cong E(2^6)$ .

Wir nehmen nun zunächst an, daß  $Y$  in  $R_1 R_2$  enthalten ist. Wäre  $Y \leq R_1$ , so folgte wegen  $C_U(r_1 r_2) \cdot R_1 \leq E \cong \text{Ex}(2^{13})$  dann  $C_U(R_1) \geq E(2^2)$ ; dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß  $C_U(R_1) = \langle u_1 \rangle$  gilt. Da jede elementar-abelsche Untergruppe von  $R_1 R_2$  in  $R_1$  oder in  $R_2$  enthalten ist, folgt also  $Y \leq R_2$ . Ferner gibt es ein Element  $d \in R_2 - R_1$  mit  $d \in Y$ . Da wir  $d$  auch durch ein beliebiges  $T_1$ -Konjugiertes von  $d$  ersetzen können und da  $r_1 r_2 \in Y$  ist, können wir nun o.B.d.A. annehmen, daß  $d \in \{d_2, r_3 d_2, s_2, r_0 s_2\}$  ist. Wir beachten, daß  $C_U(r_1 r_2, r_3 d_2) = C_U(r_1 r_2, r_0 s_2) = C_U(R_2) \cong E(2^3)$  ist; damit folgt  $d \in \{d_2, s_2\}$ . Da  $C_U(r_1 r_2, d_2) = C_U(R_2) \cdot \langle u_3 \rangle$  und  $C_U(r_1 r_2, s_2) = C_U(R_2) \cdot \langle v_2 r_2 \rangle$  ist, gilt offensichtlich  $X_0 = C_U(r_1 r_2, d) \cong E(2^4)$  und  $Y \cong E(2^4)$ .

Wir beachten nun, daß  $C_U(r_1 r_2) = [U, r_1 r_2] \cdot \langle u_3 \rangle = [U, r_1 r_2] \cdot \langle v_2 r_2 \rangle$  ist; insbesondere ist also in jedem Falle  $C_U(r_1 r_2) = [U, r_1 r_2] X_0$ . Wir können daher o.B.d.A. annehmen, daß  $r_1 r_2$  in  $X$  enthalten ist. Damit folgt aber auch, daß  $d \in X$  ist und somit schließlich  $X = X_0 \times Y$ ; dabei ist  $Y \leq C_{R_2}(X_0)$ .

Nun verifizieren wir leicht, daß  $Y \cong C_{R_2}(X_0) \cong E(2^4)$  ist und somit einer der folgenden zwei Fälle vorliegt:

- (1)  $X_0 = \langle u_1, u_2, u_4, u_3 \rangle$  und  $Y = \langle r_1 r_2, r_0, r_2, d_2 \rangle$  ;  
 (2)  $X_0 = \langle u_1, u_2, u_4, v_2 r_2 \rangle$  und  $Y = \langle r_1 r_2, r_1, r_3, s_2 \rangle$  .

Wir beachten, daß stets  $X = C_V(Y) \times Y$  gilt und daß  $a_1 a_2 \in V$  ist mit  $a_1 a_2 : \langle r_1, r_2, r_3, s_2 \rangle \rightarrow \langle r_0, r_2, d_2, r_1 \rangle$  . Also ist  $X$  konjugiert zu  $\langle u_1, u_2, u_3, u_4, r_0, r_2, d_2, r_1 \rangle = C_W(r_1) \times \langle r_1 \rangle$  . Da  $W^S = V$  und  $[r_1, s] = w_1 \in C_V(r_1)$  ist, sowie  $a_2 \in L$  mit  $a_2 : r_1 \rightarrow r_0$  , ist  $X$  dann offensichtlich auch zu  $C_V(r_0) \cdot \langle r_0 \rangle = C_U(r_0) \cdot \langle r_0 \rangle = Q_1$  konjugiert. Somit ist in diesem Falle die Behauptung des Lemmas bewiesen.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß  $r_1 r_2 \in Y \leq T_1$  und  $Y \not\leq R_1 R_2$  ist. Da alle Involutionen aus  $T_1 - R_1 R_2$  unter  $T_1$  zu  $t_1 t_2$  konjugiert sind, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $t_1 t_2 \in Y$  ist. Da elementar-abelsche Untergruppen von  $R_1 R_2$  in  $R_1$  oder in  $R_2$  enthalten sind, gibt es ein  $j \in \{1, 2\}$  mit  $\langle r_1 r_2, t_1 t_2 \rangle \leq Y \leq C_{R_j}(t_1 t_2) \cdot \langle t_1 t_2 \rangle = \langle r_0, r_1 r_2, d_j, t_1 t_2 \rangle$  . Wegen  $E(2^4) \leq X_0 \leq C_U(r_1 r_2, t_1 t_2) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 u_5 v_1 r_0 \rangle$  und  $[d_2, u_4 u_5 v_1 r_0] = u_2$  erhalten wir schließlich  $j = 1$  und  $Y = \langle r_0, r_1 r_2, d_1, t_1 t_2 \rangle$  sowie  $X_0 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 u_5 v_1 r_0 \rangle$  . Wie im vorigen Falle ist  $C_U(r_1 r_2) = [U, r_1 r_2] X_0$  ; ebenso können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $X = X_0 \times Y$  ist. Wir beachten nun, daß  $t_1 t_2 \in H - H'$  ist und daß außerdem  $X = C_E(t_1 t_2) \times \langle t_1 t_2 \rangle$  ist. Nach (3.11) ist  $t_1 t_2$  in  $H$  zu  $t_1$  konjugiert; somit ist dann  $X$  zu  $C_E(t_1) \times \langle t_1 \rangle$  konjugiert. Da  $C_E(t_1) \cdot \langle t_1 \rangle = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 r_0, r_0, r_1, d_1, t_1 \rangle = Q_2$  ist, haben wir also auch in diesem Falle die Behauptung des Lemmas bewiesen.

Wir müssen nun also noch die folgende Situation untersuchen: Es ist  $E(2^3) \leq Y \leq E(2^4)$  und  $X_0 = C_U(Y)$  mit  $|Y| \cdot |X_0| = |X| = 2^8$ ; ferner induzieren sämtliche Involutionen aus  $Y$  2-zentrale Involutionen in  $M/U$ .

Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß  $\langle r_0 \rangle \leq Y \leq E_1 E_2 A_0$  ist. Es sei daran erinnert, daß  $U\langle r_0, r_1 \rangle/U$ ,  $U\langle r_0, r_2 \rangle/U$  und  $U\langle r_0, r_1 r_3 d_1 \rangle/U$  Repräsentanten der konjugierten Klassen von Vierergruppen in  $M/U$  sind, welche nur 2-zentrale Involutionen aus  $M/U$  enthalten.

Wir setzen nun  $N = UE_1 E_2 A_0$  und berechnen mit den bekannten Relationen aus (3.2) - (3.4) sowie den Resultaten in (3.6) dann  $W_1 := C_U(r_0, r_1) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, v_1 r_0 \rangle \cong E(2^5)$  und  $W_2 := C_U(r_0, r_1 r_3 d_1) = \langle u_1, u_2, w_1, u_5, v_1 r_0 \rangle \cong E(2^5)$  sowie  $C_U(r_0, r_2) = U_0$ ; ferner gilt  $C_N(W_1) = U \cdot \langle r_0, r_1 \rangle$  und  $C_N(W_2) = U \cdot \langle r_0, r_1 r_3 d_1 \rangle$ . Da  $U_0 = Z(UE_2)$  ist und andererseits auch  $X_0 = C_U(Y)$  ist, folgt nun also offensichtlich  $X_0 = C_U(Y) \cong E(2^4)$  sowie  $\langle r_0 \rangle \leq Y \cong E(2^4)$  mit  $Y \neq E_2$ .

Wir wollen die Resultate aus (3.30) anwenden und berechnen daher  $C_U(r_0, r_2, r_3 d_1, r_1 r_3 s_1) = \langle u_1, u_2 u_3 u_4, u_3 u_5 \rangle \cong E(2^3)$  und  $C_U(r_1, r_3, d_1, s_1) = \langle u_1, v_1 r_0, v_2 r_2 \rangle \cong E(2^3)$ . Nun sehen wir leicht mit (3.30), daß o.B.d.A. einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

- (1)  $Y = E_1$  und  $X_0 = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 r_0 \rangle$ ;
- (2)  $Y = \langle r_0, r_1, r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$  und  $X_0 = \langle u_1, u_2, w_1, v_1 r_0 \rangle$ .

Da  $\langle u_1, u_2, w_1, v_1 r_0 \rangle = [U, r_0 r_1]$  ist und  $a_6 \in M$  ist mit  $a_6: r_0 \rightarrow r_1 \rightarrow r_0 r_1 \rightarrow r_0$  sowie  $[U, r_0] = C_U(E_1)$ , können wir dann wegen  $C_M(C_U(E_1)) = UE_1$  also o.B.d.A. annehmen, daß der Fall (1) vorliegt.

Wir können im folgenden also annehmen, daß  $Y = E_1$  und  
 und  $X_0 = C_U(E_1) = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 r_0 \rangle = E(2^*)$  ist. Wir set-  
 zen nun  $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (r_0, r_1, d_1, t_1)$ ; außerdem sei  
 $W_1 = \langle u_4, u_5, u_6 \rangle$ ,  $W_2 = \langle w_1, v_2 r_2, v_3 d_2 \rangle$  sowie  
 $W_3 = \langle u_4 u_5, v_2 r_2, v_4 t_2 \rangle$  und  $W_4 = \langle u_6, v_3 d_2, v_4 t_2 \rangle$ .  
 Dann gilt  $C_U(e_i) = X_0 \times W_i$  für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ; ferner  
 können wir  $x_i \in W_i$  wählen derart, daß  $x_i e_i \in X$  ist.  
 Für  $i \neq j$  ist dann  $[x_i, e_j] = [x_j, e_i] \in [W_i, e_j] \cap [W_j, e_i]$ .  
 Da  $X_0 = [U, r_0]$  und  $[U, r_1] = \langle u_1, u_2, u_3 v_1 r_0, w_1 \rangle$  ist,  
 können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $x_2 \in \langle v_2 r_2, v_3 d_2 \rangle$  ist.  
 Mit (3.4) folgt zunächst  $[x_2, e_3] = [x_3, e_2] = 1$  und damit  
 $x_2 \in \langle v_2 r_2 \rangle$  sowie  $x_3 \in \langle v_2 r_2 \rangle$ . Dies impliziert wiederum  
 $[x_2, e_4] = [x_4, e_2] \in \langle u_1 v_1 r_0 \rangle \cap \langle u_2, u_1 u_3 v_1 r_0 \rangle = \langle 1 \rangle$ ; also  
 gilt  $x_2 = 1$  und  $x_4 \in \langle v_3 d_2 \rangle$ . Damit erhalten wir dann  
 $x_1 \in C_{W_1}(r_1) = \langle u_4 \rangle$ . Außerdem ist  $[x_3, e_4] = [x_4, e_3] = 1$   
 und somit auch  $x_3 = x_4 = 1$ . Aus  $[x_1, e_4] = 1$  folgt nun  
 noch  $x_1 = 1$ .

Wir haben damit gezeigt, daß o.B.d.A.  $X = X_0 \times Y = Q_2$   
 ist. Somit ist das Lemma vollständig bewiesen.

Q.E.D.

(5.5) Lemma. Ist  $X$  eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung 2 oder 4 von  $J$ , so ist  $N_J(X)$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H$ ,  $K$ ,  $L$  oder  $M$  konjugiert.

Beweis. Da  $J$  genau zwei Konjugiertenklassen von Involutionen hat und da  $C_J(u_1) = H$  sowie  $C_J(w_1) = H_1 \leq M$  ist, folgt die Behauptung im Falle  $X \cong Z_2$ .

Es sei im folgenden also  $X \cong E(2^2)$ ; wir setzen ferner  $C = C_J(X)$  und  $N = N_J(X)$ . Da die Behauptung des Lemmas trivialerweise richtig ist, falls  $N/C \leq Z_2$  gilt, können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $Z_3 \leq N/C \leq \text{Sym}_3$  ist. Insbesondere ist dann  $X^* \leq \text{ccl}_J(x)$  für ein  $x \in \{u_1, w_1\}$ .

Wir nehmen nun zunächst an, daß  $x = u_1$  gilt. Aus (3.11) können wir nun entnehmen, daß o.B.d.A. dann  $X = \langle u_1, u_2 \rangle$  oder  $X = \langle u_1, u_6 v_1 r_0 \rangle$  ist; in (3.11) haben wir außerdem gesehen, daß  $U$  eine charakteristische Untergruppe von  $C_J(u_1, u_6 v_1 r_0)$  ist. Somit können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $X = \langle u_1, u_2 \rangle$  ist. Nach (3.11) ist dann  $O_2(C) = R \cdot \langle d_1, t_1 \rangle$ ; da  $R \text{ char } O_2(C)$  ist, folgt  $N \leq K$  und damit auch die Behauptung des Lemmas in diesem Falle.

Wir betrachten nun den Fall, daß  $x = w_1$  ist. Nach (3.12) ist dann o.B.d.A.  $X \in \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_1, w_2 r_0 \rangle, \langle w_1, u_3 r_1 \rangle\}$ . Ferner wissen wir, daß  $U = O_2(C_J(w_1, w_2))$  ist und daß außerdem auch  $V^S = W \text{ char } C_J(w_1, w_2 r_0) = W \cdot \langle v_1 r_0, s_2 t_1, j_2 t_1, v_3 d_2 r_1 \rangle$  ist. Somit können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $X = \langle w_1, u_3 r_1 \rangle$  ist. Aus (3.12) wissen wir außerdem, daß  $C = O_2(C) \cdot \langle y_1, s_1 \rangle$  ist mit  $O_2(C) = C_U(r_1) \langle u_3 r_1, r_0, r_2, d_2, u_5 r_1 r_3 d_1, u_6 t_1 s_2 \rangle$  sowie  $\langle y_1, s_1 \rangle \cong \text{Sym}_3$ . Mit (3.4) berechnen wir nun leicht, daß

$Z := Z(O_2(C)) = \langle w_1, u_3 r_1, u_1, u_2 \rangle$  ist. Da  $Z \leq E$  ist und  $y_1: u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_1 u_2$  gilt, ist dann offensichtlich auch  $\langle Z \cap \text{cccl}_J(u_1) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$ . Damit ist also  $\langle u_1, u_2 \rangle$  ein Normalteiler von  $N$ . Die Behauptung des Lemmas folgt nun offensichtlich aus dem vorhergehenden Teil des Beweises.

Q.E.D.

(5.6) Lemma. Es sei  $X \neq \langle 1 \rangle$  eine elementar-abelsche 2-Untergruppe von  $J$  derart, daß  $C_J(X)$  keine 2-Gruppe ist; dann ist  $N_J(X)$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H$ ,  $K$ ,  $L$  oder  $M$  konjugiert.

Beweis. Wir nehmen an, daß  $X$  ein Gegenbeispiel von minimaler Ordnung zur Behauptung des Lemmas ist und setzen  $C = C_J(X)$  sowie  $N = N_J(X)$ ; außerdem sei  $2 \neq p \in \Pi(C)$  und  $Y \in \text{Syl}_p(C)$ .

Aus (5.5) und der Minimalität von  $|X|$  folgt offensichtlich die folgende Aussage:

(1)  $N$  operiert irreduzibel auf  $X$  und es ist  $|X| \geq 2^3$ .

In §3 haben wir die Struktur von lokalen Untergruppen von  $J$  untersucht; aus diesen Resultaten folgt sofort, daß  $p \in \{3, 5\}$  ist. Mit (3.14) und (3.16.d) erhalten wir dann

(2)  $|Y| = p = 3$ .

Da es in  $J$  genau eine Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung drei gibt, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $Y = \langle a_1 \rangle$  und somit  $Y_0 = N_N(Y) \leq H_0$  ist. Mit dem Frattini-Argument erhalten wir ferner  $N = CY_0 = O_2(C)Y_0$ . Da  $H_0 \leq H$  ist, folgt aus (1) dann insbesondere

(3)  $X \cap \langle u_1 \rangle = \langle 1 \rangle$ .

Wir setzen nun  $\bar{H}_0 = H_0 / \langle u_1, a_1 \rangle$ ; offensichtlich ist dann  $X \cong \bar{X} \leq (\bar{H}_0)' \cong M_{22}$ . Da die 2-lokale Struktur von  $M_{22}$  wohlbekannt ist, sehen wir nun leicht, daß  $|X| \in \{8, 16\}$  ist.

Wir nehmen nun zunächst an, daß  $X \cong E(2^3)$  ist. Wegen  $N = O_2(C)Y_0$  folgt aus (1) und der Struktur von  $GL_3(2)$ , daß  $7 \in \Pi(Y_0)$  ist. Wir beachten, daß es in  $M_{22}$  genau eine konjugierten Klasse von nichttrivialen 2-Gruppen gibt, so daß deren Normalisator in  $M_{22}$  isomorph zu  $E(2^3) \cdot L_3(2)$  ist. Wir wissen ferner, daß  $(H_0)' \geq C_V(a_1) \cdot L_1$  ist, wobei  $L_1 \cong L_3(2)$  und  $\bar{V} = [C_V(a_1), L_1] = \langle u_6, v_3, v_4 \rangle \cong E(2^3)$  sowie  $C_V(a_1) = \langle u_1 \rangle \times \bar{V}$  ist. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß  $X = \bar{V} = \langle u_6, v_3, v_4 \rangle$  ist. Insbesondere ist dann  $N = C \cdot L_1$  und  $C \geq V \cdot \langle a_1 \rangle$ .

Wir setzen nun  $Q = O_2(C)$ . Offensichtlich ist  $V \leq Q$  und  $\langle u_1 \rangle \leq C_Q(x)$  für  $\langle x \rangle \in \text{Syl}_7(Y_0) \leq \text{Syl}_7(N) \cap \text{Syl}_7(H)$ . Da  $Q \leq H'$  und  $C_{H'}(x) = \langle u_1, a_1 \rangle \times \langle x \rangle$  ist, folgt also  $C_Q(x) = \langle u_1 \rangle$ . Wäre  $V$  nicht charakteristisch in  $Q$ , so gäbe es in  $Q$  noch genau eine weitere zentralisatorgleiche  $E(2^{10})$ -Untergruppe  $\bar{W}$  und  $\langle V, \bar{W} \rangle$  wäre dann eine charakteristische Untergruppe von  $Q$  mit  $\langle V, \bar{W} \rangle \cong \langle V, W \rangle = VE_2$ ; dies widerspräche jedoch der Tatsache, daß  $C_Q(x) = \langle u_1 \rangle$  ist. Also ist  $V$  eine charakteristische Untergruppe von  $Q$ ; damit folgt dann schließlich  $N \leq N_J(V) = L$ . Dies widerspricht aber der Wahl von  $X$ . Wir haben damit gezeigt, daß  $X$  eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung 16 ist.

Wir setzen nun  $P_0 = \langle u_6, v_3, d_2, s_2 \rangle$  und außerdem  $P_1 = \langle u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, s \rangle$ ; dann ist  $S_0 = \langle P_0, P_1, t_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $(H_0)'$  mit  $P_i \cong E(2^4)$ .



Bekanntlich gibt es in  $\overline{S}_0$  genau zwei  $E(2^4)$ -Untergruppen; diese sind  $\overline{P}_0$  und  $\overline{P}_1$ . Wir können somit wegen (3) dann o.B.d.A. annehmen, daß  $\overline{X} \in \{\overline{P}_0, \overline{P}_1\}$  ist.

Wir betrachten nun den Fall, daß  $\overline{X} = \overline{P}_1$  ist. Dann ist offensichtlich  $X \leq U \leq C$ ; da ferner  $[U, a_1] \leq U$  gilt, erhalten wir  $U \leq O_2(C)$ . Dann ist aber  $U$  eine charakteristische Untergruppe von  $O_2(C)$  und somit  $N \leq M$ . Dies widerspricht der Wahl von  $X$ .

Wir können im folgenden also annehmen, daß  $\overline{X} = \overline{P}_0$  ist. Wir setzen nun  $P = \langle u_1 \rangle \times P_0 = \langle u_1 \rangle \times X$ . Wir vermerken, daß  $C_{H_0}(X) = C_{H_0}(P) = C_{H_0}(P_0) = P \times \langle a_1, t_1 \rangle$  und daß damit auch  $\text{Aut}_{H_0}(P) \cong \text{Sym}_5$  ist. Schließlich setzen wir noch  $Q = O_2(C)$ ; dann ist  $C = Q \cdot \langle a_1, t_1 \rangle$  und  $N/C \cong Y_0 / (Y_0 \cap C) \cong \text{Sym}_5$ .

Wir beachten, daß sowohl  $\langle P_0, P_1 \rangle$  als auch  $S_0$  nicht über  $\langle u_1 \rangle$  zerfällt; da  $Y_0$  nach (1) irreduzibel auf  $X$  operiert und außerdem auch  $P$  normalisiert, kann  $N/C$  weder zu  $\text{Alt}_5$  noch zu  $\text{Sym}_5$  isomorph sein. Wegen (1) sehen wir ebenfalls, daß  $O_2(N/C) = O_3(N/C) = \langle 1 \rangle$  ist und daß damit  $O_5(N/C) \neq \langle 1 \rangle$  ist. Es sei also  $F \in \text{Syl}_5(Y_0)$ ; dann ist offensichtlich  $F \cong Z_5$  und  $X = [P, F]$  sowie  $N/C \cong F_{20}$ . Da  $S_0/P \cong D_8$  ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $N = C \cdot F \cdot \langle st_2 \rangle = Q \cdot \langle a_1, t_1 \rangle \cdot F \cdot \langle st_2 \rangle$  ist.

Wir berechnen nun zunächst  $Q_0 = C_E(X)$ ; mit den Relationen aus (3.2) - (3.4) folgt durch einfache Rechnungen dann  $Q_0 = X \times \langle u_1, u_2, u_4 \rangle \cong E(2^7)$ ; insbesondere ist dann auch  $X \leq Z(Q) \leq Q_0 \leq Q$ . Wäre  $X < Z(Q)$ , so wäre offensichtlich  $Z(Q) \neq P$  und damit  $\langle 1 \rangle \neq [Z(Q), \langle a_1 \rangle] = \langle u_2, u_4 \rangle \triangleleft N$ ; mit (5.5) erhielten wir nun einen Widerspruch. Wir haben damit gezeigt, daß  $X = Z(Q) = Z(C) < Q_0 < Q < C = Q \cdot \langle a_1, t_1 \rangle$  ist.

Offensichtlich ist  $[X, \langle st_2 \rangle] = [P, \langle st_2 \rangle] \leq X$ ; wir berechnen nun  $[d_2, t_2s] = v_3d_2$ ,  $[s_2, t_2s] = w_2v_3$  sowie  $[v_3s_2, t_2s] = u_1d_2$ . Also gilt  $X \geq \langle u_6, u_1v_3, v_3d_2 \rangle$ . Da  $v_3d_2 \in U \cap \text{ccl}_j(w_1)$  ist, folgt dann  $C \leq C_j(v_3d_2) \leq M$ . Somit normalisiert  $C$  die Gruppe  $C \cap U = Q \cap U = Q_0 \cap U = \langle u_1, u_2, u_4, u_6, v_3d_2 \rangle$  und damit auch  $X(C \cap U) = Q_0$ . Da  $Q_0 = O_2(C \cap H)$  von  $Y_0$  normalisiert wird, ist  $Q_0$  ein Normalteiler von  $N$ .

Nach einem Satz von Sylow ist  $|N : Y_0| \equiv 1 \pmod{3}$ ; da aber  $|N : Y_0| = |Q : C_Q(a_1)| = |Q : P|$  und  $P = X \times \langle u_1 \rangle$  ist, folgt dann  $|Q : X| \equiv 2 \pmod{3}$ . Andererseits wissen wir, daß  $UC/U \leq C_M(v_3d_2)/U \leq \text{Aut}(M_{22})$  ist; daraus folgt dann  $2^8 \geq |UC/U|_2 = |C/(Q \cap U)|_2 = 2 \cdot |Q/(Q \cap U)| = |Q/X|$ . Da aber  $E(2^7) \approx Q_0 < Q$  ist, folgt schließlich  $|Q/X| \in \{2^5, 2^7\}$ .

Wir nehmen nun an, daß  $|Q/X| = 2^5$  ist. Da  $F$  die Gruppen  $X$ ,  $Q_0$  und  $Q$  normalisiert, sehen wir nun leicht, daß  $|C_Q(F)| = 2^5$  und damit  $Q = X \times C_Q(F)$  ist. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß  $X = Z(Q)$  ist. Wir haben also gezeigt, daß  $|Q/X| = 2^7$  ist.

Offensichtlich ist  $Q/Q_0 \approx E(2^4)$  und die Gruppe  $Y_0/C_Q(a_1) = \text{Sym}_3 \times F_{20}$  operiert transitiv auf  $(Q/Q_0)^*$ . Da  $|\text{ccl}_Q(u_1)| = |Q : C_Q(u_1)| = |Q : Q_0| = 2^4$  ist und  $[Y_0, \langle u_1 \rangle] = \langle 1 \rangle$  ist sowie  $Q' \leq Q_0$ , verifizieren wir nun leicht, daß  $[Q, \langle u_1 \rangle] = Z(Q) = X$  und somit  $\text{ccl}_Q(u_1) = X \cdot u_1$  ist. Wir haben damit schließlich einen Widerspruch hergeleitet, denn es ist  $u_6 \in X$  und  $u_1u_6 = w_2 \in \text{ccl}_j(w_1)$ . Es existiert also kein Gegenbeispiel.

Q.E.D.

(5.7) Lemma. Es sei  $X \neq \langle 1 \rangle$  eine elementar-abelsche 2-Untergruppe von  $J$  derart, daß  $N = N_J(X)$  in  $J$  nicht zu einer Untergruppe von  $H$ ,  $K$ ,  $L$  oder  $M$  konjugiert ist. Nach (5.6) ist dann  $C = C_J(X)$  eine 2-Gruppe. Außerdem gilt folgendes:

(a) Ist  $X$  von minimaler Ordnung bzgl. der obigen Voraussetzungen, so operiert  $N$  irreduzibel auf  $X$  und es ist  $C = O_2(N)$ .

(b) Ist  $Y$  ein elementar-abelscher Normalteiler von  $N$ , so ist  $|Y| = 2^n$  mit  $n \in \{0, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

(c) In  $C$  gibt es keine elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung  $2^9$ .

(d) Enthält  $N$  ein Element  $q$  der Ordnung 7, so ist  $Z(C) \cap C_J(q) = \langle 1 \rangle$ ; insbesondere ist dann  $X \cong E(2^3)$  oder  $X \cong E(2^6)$ .

Beweis. Die Behauptung unter (a) und (b) ergeben sich trivialerweise aus den Resultaten in (5.2) - (5.6).

Wir nehmen nun an, daß  $C$  eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung  $2^9$  enthält; da  $X$  diese Gruppe zentralisiert, muß  $C$  nach (5.3) dann auch eine Untergruppe  $F$  aus  $\text{ccl}_J(U) \cup \text{ccl}_J(V)$  enthalten. Da  $N$  nicht zu einer Untergruppe von  $L$  oder  $M$  konjugiert ist, kann  $F$  nicht charakteristisch in  $C$  sein; somit ist dann o.B.d.A.  $F = V$  und  $\langle \text{ccl}_C(F) \rangle = VW = V \cdot E_2$ . Da aber  $N_J(VW) = U \cdot E_2 \cdot A_2 \leq M$  ist, haben wir damit einen Widerspruch hergeleitet. Somit ist die Behauptung in (c) bewiesen.

Um die Aussage in Teil (d) zu beweisen, setzen wir  $Z = Z(C)$  und nehmen an, daß  $q$  ein Element der Ordnung 7 aus  $N$  ist mit  $C_Z(q) \neq \langle 1 \rangle$ . Ferner sei  $v$  eine Involution aus  $C_Z(q)$ .

Wir nehmen nun zunächst an, daß  $v \in \text{ccl}_J(w_1)$  ist. Dann können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $v = v_1 r_0$  und  $q = q_0$  ist. Da  $E(2^{11}) \cong U = O_2(C_J(v)) \leq C_J(v) = C_M(v) \cong E(2^{11}) \cdot \text{Aut}(M_{22})$  ist, ist  $C$  eine 2-Untergruppe von  $C_J(v)$ , welche von  $q_0$  normalisiert wird. Da es in  $M_{22}$  genau eine Konjugiertenklasse von nichttrivialen 2-Untergruppen gibt, welche von Elementen der Ordnung 7 normalisiert werden, und da deren Normalisator in  $M_{22}$  isomorph zu  $E(2^3) \cdot L_3(2)$  ist, können wir also o.B.d.A. annehmen, daß  $C \leq UE_1$  gilt.

Wir beachten nun, daß  $E_0 := [E_1, \langle q_0 \rangle] = \langle r_1, d_1, t_1 \rangle$  und  $C_{E_1}(q_0) = \langle r_0 \rangle$  ist. Offensichtlich ist  $C \leq U \cdot E_1$  und  $Z_1 := Z(UE_1) = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 r_0 \rangle \leq C$ . Da  $X$  nicht in  $U$  enthalten ist, folgt  $\{UX, UC\} \subseteq \{U \cdot \langle r_0 \rangle, U \cdot E_0, U \cdot E_1\}$ .

Ist  $UX = U \cdot E_1$ , so folgt  $C = C_U(X)X = C_U(E_1)X = E(2^8)$  und damit nach (5.4) ein Widerspruch; also ist  $UX < UE_1$ .

Wir nehmen nun an, daß  $UX = U \cdot \langle r_0 \rangle$  gilt. Dann ist  $\langle 1 \rangle \neq C_X(q_0) \leq C_{UE_1}(q_0) = \langle v_1 r_0, r_0, \tilde{s} \rangle \cong D_8$  mit einer geeigneten Involution  $\tilde{s} \in U$ . Nun gilt o.B.d.A.  $r_0 \in C_X(q_0)$  und damit  $X < C_U(r_0) \langle r_0 \rangle \leq C \leq C_{UE_1}(r_0) = C_U(r_0) \cdot E_1$ . Die Operation von  $q_0$  auf  $C$  erzwingt nun  $C = C_U(r_0) \cdot E_1$ , denn nach (5.4) ist  $C \neq C_U(r_0) \langle r_0 \rangle$ . Wir berechnen nun leicht, daß  $C' = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$  ist. Damit folgt schließlich  $N \leq N_J(C') = U \cdot E_1 E_2 \cdot A_0 \leq M$ ; dies ist ein Widerspruch.

Wir betrachten nun den Fall, daß  $UX = U \cdot E_0$  ist. Dann gilt  $C \cap UX = Z_1 X \approx E(2^7)$ . Ist  $C \neq C \cap UE_0$ , so gilt also  $|C : C \cap UE_0| = 2$  mit  $C \cap UE_0 = Z_1 X \leq Z$ ; folglich ist dann  $C$  abelsch. Da nach (5.4)  $C$  nicht isomorph zu  $E(2^8)$  ist, folgt nun  $C \approx Z_4 \times E(2^6)$  und somit nach (b) ein Widerspruch. Wir haben also gezeigt, daß  $C = C \cap UE_0 = Z_1 X \approx E(2^7)$  ist. Ebenso wie im letzten Abschnitt des Beweises von (5.4) können wir nun zeigen, daß o.B.d.A.  $C = Z_1 \times E_0$  ist. Damit haben wir jedoch einen Widerspruch erhalten, denn es ist  $E(2^8) \approx Z_1 \times E_1 \leq C_J(Z_1 \times E_0)$ .

Wir haben bisher also gezeigt, daß  $C_Z(q)$  keine Involutionen aus  $\text{ccl}_J(w_1)$  enthält.

Wir nehmen im folgenden also an, daß  $v \in \text{ccl}_J(u_1)$  ist. Wir können dann also o.B.d.A. annehmen, daß  $v = u_1$  und  $q = q_1$  ist. Da  $C \cdot \langle q_1 \rangle \leq H$  ist, folgt aus der bereits im obigen Abschnitt benutzten 2-lokalen Eigenschaft von  $M_{22}$ , daß wir o.B.d.A. nun  $C \leq E \cdot \langle u_6, v_3, v_4 \rangle \times \langle t_1 \rangle$  annehmen dürfen. Wir setzen nun  $\tilde{V} := \langle u_6, v_3, v_4 \rangle$  und beachten, daß  $\tilde{V} = [\tilde{V}, \langle q_1 \rangle]$  sowie  $[q_1, t_1] = 1$  ist.

Ist  $EX = E \cdot (\tilde{V} \times \langle t_1 \rangle)$ , so ist  $C = C_E(X)X$ ; da nun aber für Involutionen  $y \in (\tilde{V} \cup \langle t_1 \rangle)$  stets  $u_1 y \notin \text{ccl}_J(y)$  ist, folgt dann  $C_E(X) = C_E(\tilde{V}, t_1) = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 \rangle \approx E(2^6)$  und somit schließlich  $C = C_E(X)X \approx E(2^8)$ . Dies steht jedoch im Widerspruch zu (5.4); also gilt  $EX < E \cdot (\tilde{V} \times \langle t_1 \rangle)$ .

Ist  $EX = E\tilde{V}$ , so erhalten wir  $C \cap E\tilde{V} = C_E(X)X = C_E(\tilde{V})X = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2 \rangle X \approx E(2^{10})$ ; dies widerspricht aber der Aussage in Teil (c).

Wir betrachten nun den Fall, daß  $EX = E \cdot \langle t_1 \rangle$  ist. Da  $[E, \langle t_1 \rangle] = \langle u_2, u_1 u_3, v_1, r_0, r_1, d_1 \rangle \cong E(2^6)$  und außerdem  $C_E(t_1) = \langle u_1 \rangle \times [E, \langle t_1 \rangle] \cong E(2^7)$  ist sowie  $u_1 t_1 \in \text{ccl}_J(w_1)$ , können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $t_1 \in C_X(q_1)$  ist. Dann ist aber offensichtlich auch  $\langle u_1, t_1 \rangle \leq C_Z(q_1)$ . Da  $u_1 t_1 \in \text{ccl}_J(w_1)$  ist, haben wir einen Widerspruch erhalten.

Wir haben also gezeigt, daß  $X \leq E$  gilt. Es sei ferner daran erinnert, daß  $EC \in \{E, E\langle t_1 \rangle, E\bar{V}, E\bar{V}\langle t_1 \rangle\}$  ist.

Ist nun  $E\bar{V} \leq EC$ , so folgt  $X \leq C_E(\bar{V}) \leq \bar{V}$  und damit  $V \leq C$ ; dies widerspricht (c). Wir betrachten daher den Fall, daß  $EC = E \cdot \langle t_1 \rangle$  gilt. Dann ist also offensichtlich  $X \leq C_E(t_1) = \langle u_1, u_2, u_3, v_1, r_0, r_1, d_1 \rangle$  und somit auch  $X \leq C_E(t_1) < C_V(E_1) \times E_1 \leq C$ . Mit (5.4) folgt sogar, daß  $C_V(E_1) \times E_1 < C$  ist. Damit ist dann  $C \cap E > C_E(t_1)$  und  $\langle t_1, u_1 \rangle \cap Z(C) = \langle u_1 \rangle$ . Da  $Z(E\langle t_1 \rangle) = Z(E) = \langle u_1 \rangle$  ist, erzwingt die Operation von  $q_1$  auf  $C \cap E$  schließlich  $(C \cap E) / \langle u_1 \rangle \cong E(2^9)$ . Da  $E \cong Ex(2^{13})$  ist, folgt dann sofort  $|Z(C \cap E)| = 2^4$  und somit  $\langle u_1 \rangle X = Z(C \cap E) = Z(C) \cong E(2^4)$ . Da  $X$  nicht in  $V$  enthalten ist, gibt es dann ein Element  $w$  aus  $\langle u_1, u_2, u_3, v_1 \rangle$  mit  $w r_0 \in X$ . Da  $q_1: r_0 \rightarrow r_1 d_1 \rightarrow r_0 r_1 \rightarrow r_0 r_1 d_1 \rightarrow r_0 d_1 \rightarrow d_1 \rightarrow r_1 \rightarrow r_0$ ,

$u_2 \rightarrow u_1 u_2 u_3 \rightarrow u_1 u_2 u_3 v_1 \rightarrow u_1 u_3 v_1 \rightarrow u_2 v_1 \rightarrow u_1 u_3 \rightarrow v_1 \rightarrow u_2$  gilt, sehen wir nun leicht, daß  $w \in \langle u_1 \rangle$  ist. Insbesondere ist dann also  $X \in \{\langle u_1, r_0, r_1, d_1 \rangle, \langle r_0, r_1, d_1 \rangle\}$ . Damit folgt  $C_E(X) = C_E(r_0, r_1, d_1) = \langle u_1, u_2, u_3, v_1, r_1 \rangle$  und  $C = C_E(X) \cdot \langle t_1 \rangle$ . Nun sehen wir leicht, daß  $Q = C_V(E_1) \cdot E_1$  die einzige  $E(2^8)$ -Untergruppe von  $C$  ist. Mit (5.4) folgt nun  $N \leq N_J(Q) \leq L$ ; dies ist ein Widerspruch.

Wir haben bisher also gezeigt, daß sowohl  $X$  als auch  $C$  in  $E$  enthalten ist. Da  $q_1$  fixpunktfrei auf  $E - Z(E)$  operiert, gilt offensichtlich  $C_C(q_1) = C_2(q_1) = \langle u_1 \rangle$ . Da  $N$  nicht in  $H$  enthalten ist, folgt dann  $C \cong E(2^7)$  und  $E(2^6) \leq X \leq C$ .

Wir betrachten nun den Fall, daß  $X = C \cong E(2^7)$  ist. Wir setzen  $\bar{N} = N/C$ . Da  $\Pi(L_7(2)) = \{2, 3, 5, 7, 31, 127\}$  ist, folgt mit (3.19) nun  $\Pi(N) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ . Schließlich vermerken wir noch, daß  $O_2(\bar{N}) = \langle 1 \rangle$  ist.

Wir wollen nun zeigen, daß  $O(\bar{N}) = \langle 1 \rangle$  ist und nehmen daher zunächst an, daß es ein  $p \in \{3, 5, 7\}$  gibt derart, daß  $O_p(\bar{N}) \neq \langle 1 \rangle$  ist. Dann sei  $P$  eine Sylow  $p$ -Untergruppe von  $O_p(N \bmod C)$ ; also ist  $C \cdot P = O_p(N \bmod C)$ . Da Elemente der Ordnung 7 aus  $J$  keine Untergruppen isomorph zu  $E(3^2)$  oder  $Ex(3^3)$  normalisieren, ist dann also  $P \cong Z_p$ . Da  $N$  irreduzibel auf  $X$  operiert, folgt mit dem Frattini-Argument nun  $C_X(P) = \langle 1 \rangle$ ; andererseits liefert ein Satz von Maschke wegen  $C_J(X) = X$  und der  $p$ -lokalen Struktur von  $J$  aber  $|C_X(P)| \in \{2, 2^3, 2^5\}$ . Wir haben damit also einen Widerspruch erhalten und somit gezeigt, daß  $O(\bar{N}) = \langle 1 \rangle$  ist.

Es sei nun  $Q$  ein Normalteiler von  $N$  derart, daß  $C \triangleleft Q$  und  $\bar{Q}$  ein minimaler Normalteiler von  $\bar{N}$  ist. Da weder  $5^2$  noch  $7^2$  die Ordnung von  $J$  teilt, ist  $\bar{Q}$  eine nicht-abelsche einfache Gruppe. Wäre  $7 \notin \Pi(\bar{Q})$ , so wäre dann  $\Pi(\bar{Q}) = \{2, 3, 5\}$  und damit gäbe es ein Element  $f$  der Ordnung fünf aus  $Q$  mit  $[f, q] = 1$ ; wegen  $C_X(q) = \langle u_1 \rangle$  folgte dann aber  $Z_5 \times Z_7 \cong \langle f, q \rangle \leq C_N(u_1) \leq H$ , welches offensichtlich nicht möglich ist. Also gilt  $7 \in \Pi(\bar{Q})$ .

Da  $\bar{N}$  irreduzibel auf  $X$  operiert, ist  $X$  ein direktes Produkt von isomorphen irreduziblen  $\bar{Q}$ -Moduln; da aber  $C_X(q) = \langle u_1 \rangle$  und  $|X| = 2^7$  ist, operiert  $\bar{Q}$  irreduzibel auf  $X$ .

Wir beachten nun, daß  $E(2^6) \approx \bar{E} \leq \bar{N}$  ist. Da ein Sylow 7-Normalisator in  $J$  isomorph zu  $F_{21} \times \text{Sym}_5$  ist, liefert das Frattini-Argument nun  $\bar{Q} \cap \bar{E} \neq \langle 1 \rangle$ . Da die Elemente aus  $\bar{E}^*$  Transvektionen auf  $X$  induzieren, ist  $\bar{Q}$  isomorph zu einer einfachen, irreduziblen Untergruppe von  $SL_7(2)$ , welche von Transvektionen erzeugt wird; nach (1.11) ist  $\bar{Q}$  dann isomorph zu  $SL_7(2)$  oder  $O(7,2)$ . Da keine dieser Gruppen in  $J$  involviert ist, haben wir einen Widerspruch erhalten.

Es ist also  $E(2^6) \approx X < C = \langle u_1 \rangle \times X \approx E(2^7)$ . Wir setzen nun  $N_1 = N_J(C)$ ; offensichtlich ist  $N \leq N_1$  sowie  $E \leq N_1$ . Da  $N$  irreduzibel auf  $X$  operiert und da ferner  $[E, X] = \langle u_1 \rangle$  ist sowie  $\langle u_1 \rangle$  nach (b) nicht von  $N$  normalisiert wird, operiert  $N_1$  dann irreduzibel auf  $C$ . Nun können wir ebenso wie im Falle  $X = C$  zeigen, daß  $N_1$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert ist. Da  $N \leq N_1$  ist, haben wir damit schließlich einen Widerspruch erhalten, welcher die Behauptung unter (d) beweist.

Q.E.D.



(5.8) Lemma. Es sei  $X \neq \langle 1 \rangle$  eine elementar-abelsche 2-Untergruppe von  $J$  derart, daß  $N_J(X)$  ein Element  $f$  der Ordnung 5 enthält mit  $C_J(f) \cap Z(C_J(X)) \neq \langle 1 \rangle$ . Dann ist  $N_J(X)$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H$ ,  $K$ ,  $L$  oder  $M$  konjugiert.

Beweis. Wir setzen  $N = N_J(X)$ ,  $C = C_J(X)$  und  $Z = Z(C)$ ; außerdem sei  $N_1 = N_J(C)$  und  $\bar{N}_1 = N_1/C$ .

Wir nehmen im folgenden an, daß  $X$  von minimaler Ordnung ist derart, daß  $N$  in  $J$  nicht zu einer Untergruppe von  $H$ ,  $K$ ,  $L$  oder  $M$  konjugiert ist. Nach (5.7) operiert dann  $N$  irreduzibel auf  $X$  und es ist  $C = O_2(N)$  sowie  $X \cong E(2^n)$  mit  $3 \leq n \leq 7$ ; offensichtlich ist sogar  $[X, \langle f \rangle] \cong E(2^b)$  und  $4 \leq n \leq 7$ .

Nach Voraussetzung existiert nun eine Involution  $v$  in  $C_2(f)$ . Da es in  $J$  genau zwei Konjugiertenklassen von Involutionen gibt, können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $v$  ein Element aus  $\{u_1, w_1\}$  ist.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $v = w_1$  ist. Dann ist  $C \cdot \langle f \rangle \leq H_1 = E(2^{11}) \cdot \text{Aut}(M_{22})$ . Wir setzen nun für diesen Fall  $E_0 = \langle r_0, r_2, r_1 r_3 d_1, r_1 s_1 \rangle$ . Es sei daran erinnert, daß  $S_2 = U \cdot (E_0 E_2 \langle t_1 s_2, r_1 \rangle)$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $H_1$  und  $U \cdot (E_0 E_2 \langle t_1 s_2 \rangle)$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $(H_1)'$  ist. Bekanntlich gibt es in  $\text{Aut}(M_{22})$  genau vier Konjugiertenklassen von nichttrivialen 2-Untergruppen, welche von einem Element der Ordnung 5 normalisiert werden; Repräsentanten dieser Klassen sind isomorph zu  $E(2^b)$ ,  $E(2^4)$ ,  $E(2^5)$  bzw.  $Z_2$ . Da nach (5.7)  $U$  nicht in  $C$  enthalten ist und da  $f$  nur solche Involutionen aus  $M - U$  zentralisiert, deren Bilder

in  $M/U$  nicht-2-zentral sind, können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $\{UX, UC\} \subseteq \{UE_2, UE_0, UE_0\langle r_1r_2 \rangle, U\langle r_1r_2 \rangle\}$  ist.

Ist  $UC = UE_2$ , so folgt  $UX = UC$  und damit schließlich  $C = C_U(X)X = C_U(E_2)X = E(2^{10})$ ; dies widerspricht aber (5.7.c). Ist  $UC = U\langle r_1r_2 \rangle$ , so folgt  $UX = UC$  und somit dann  $C = C_U(X)X = C_U(r_1r_2)\langle r_1r_2 \rangle = E(2^7)$ ; mit (3.8) erhalten wir nun  $N \leq N_1 \leq M \cap H$ , also einen Widerspruch. Folglich gilt dann  $UE_0 \leq UC \leq UE_0\langle r_1r_2 \rangle$ . Nun ist klar, daß sowohl  $U \cap X \leq U \cap Z \leq C_U(E_0) = \langle u_1, w_1, u_2u_5 \rangle$  ist als auch  $\langle u_1, w_1 \rangle = C_U(E_0\langle r_1r_2 \rangle) \leq U \cap Z$ ; insbesondere ist  $[U \cap Z, \langle f \rangle] = \langle 1 \rangle$  und somit  $f \in H \cap H_1$  sowie  $UE_0 \leq UX \leq UC \leq UE_0\langle r_1r_2 \rangle$ .

Ist nun  $UX \neq UC$ , so folgt  $C_0 := C \cap U = C_U(E_0)$  und  $E(2^7) = C_0X < C$  sowie  $|C| = 2^8$  und  $C = C_0X \langle ur_1r_2 \rangle$  mit einem geeigneten  $u \in U$ . Da  $C$  weder zu  $E(2^6)$  noch zu  $Z_4 \times E(2^6)$  isomorph ist, folgt dann  $C' \neq \langle 1 \rangle$  und somit  $C' = [C_0X, \langle ur_1r_2 \rangle] = [C_0, \langle ur_1r_2 \rangle] = [C_0, \langle r_1r_2 \rangle] = \langle u_1 \rangle$ . Daraus folgt nun  $N \leq N_1 \leq H$ ; dies ist offensichtlich ein Widerspruch. Wir haben damit gezeigt, daß  $UX = UC$  gilt und daß insbesondere  $C = C_U(X)X = E(2^7)$  ist.

Es sei nun  $u \in U$  mit  $ur_0 \in C$ . Wir wissen bereits, daß  $C_U(r_0) = [U, r_0] \times \langle w_1, u_5, u_6 \rangle$  ist; also können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $u \in \langle u_5, u_6 \rangle$  ist. Da  $C$  elementarabelsch ist, folgt  $[u, r_1r_3d_1] \in [U, r_0] = \langle u_1, u_2, u_3, v_1r_0 \rangle$ ; wegen  $[u_5, r_1r_3d_1] = u_1$  und  $[u_6, r_1r_3d_1] = u_2w_1$  erhalten wir dann  $u \in \langle u_5 \rangle$ . Insbesondere ist also  $ur_0 \in C \cap E$ . Da außerdem  $C \cap U \leq E$  sowie  $C_U(r_1r_2) \leq E$  und  $f \in H$  ist, folgt nun  $C \leq E$ . Aus  $X \leq C = C_U(X) \leq E = E_X(2^{13})$  folgt ferner  $C = \langle u_1 \rangle X \leq E$  und damit  $|X| \in \{2^6, 2^7\}$ .

Da  $\Pi(L_7(2)) = \{2, 3, 5, 7, 31, 127\}$  ist, folgt aus (3.19) und (5.7.d) nun mit einem Satz von Maschke, daß  $\Pi(N_1)$  in  $\{2, 3, 5\}$  enthalten ist. Da  $N$  irreduzibel auf  $X$  operiert und da  $E \leq N_1$  ist mit  $[E, X] = [E, C] = \langle u_1 \rangle$ , operiert  $N_1$  dann irreduzibel auf  $C$ ; insbesondere ist  $O_2(\bar{N}_1) = \langle 1 \rangle$ . Mit dem Frattini-Argument sehen wir ferner, daß  $O(\bar{N}_1) = \langle 1 \rangle$  ist. Es sei nun  $Q$  ein Normalteiler von  $N_1$  derart, daß  $\bar{Q}$  ein minimaler Normalteiler von  $\bar{N}_1$  ist; offensichtlich ist  $\bar{Q}$  dann nichtabelsch und einfach. Aus (4.5) folgt nun, daß  $\bar{Q}$  isomorph zu  $\text{Alt}_5$  oder  $\text{Alt}_6$  ist. Da  $E(2^6) \cong \bar{E} \leq \bar{N}_1$  ist, folgt aus der Struktur von  $\text{Aut}(\bar{Q})$  nun, daß  $C_{\bar{N}_1}(\bar{Q})$  ein nichttrivialer, auflösbarer Normalteiler von  $\bar{N}_1$  ist. Dies steht aber offensichtlich im Widerspruch zu der Tatsache, daß  $O(\bar{N}_1) = O_2(\bar{N}_1) = \langle 1 \rangle$  ist.

Aus dem letzten Widerspruch schließen wir nun, daß  $C_2(f) \cap \text{cc}_1 J(w_1) = \emptyset$  ist.

Im folgenden können wir also o.B.d.A. annehmen, daß  $v = u_1$  ist; insbesondere ist dann  $C \cdot \langle f \rangle \leq H$ . Wir setzen nun  $P_0 = \langle u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, s \rangle$  und  $P_1 = \langle u_6, v_3, d_2, s_2 \rangle$  sowie  $t = u_6 s_2 t_1$ ; dann ist  $S = E \langle P_0, P_1, t_2, t \rangle \in \text{Syl}_2(H)$  und  $E \langle P_0, P_1, t_2 \rangle \in \text{Syl}_2(H')$ . Da  $H/E \cong \hat{3}\text{Aut}(M_{22})$  ist, liefern die gleichen Argumente wie im vorigen Falle nun zusammen mit (3.11), daß o.B.d.A.  $\{EX, EC\}$  in  $\{E, E \cdot \langle t \rangle, EP_0, EP_1, EP_1 \langle t \rangle\}$  enthalten ist.

Ist  $C \leq E$ , so folgt aus der Struktur von  $E$  und der Tatsache, daß  $N$  nicht in  $H$  enthalten ist, daß dann  $C = \langle u_1 \rangle X \cong E(2^7)$  und  $|X| \in \{2^6, 2^7\}$  ist. Wir haben eine ähnliche Situation bereits im Falle  $v = w_1$  untersucht; wir können hier nun ganz analog argumentieren und somit eb

einen Widerspruch herleiten. Somit ist also  $E \neq EC$ .

Wir nehmen nun an, daß  $EC = EP_0$  ist. Da für Involuntionen  $x$  aus  $P_0$  stets  $u_1 x \notin ccl_j(x)$  ist, folgt dann  $x \cap E \leq C_E(P_0 \text{ mod } \langle u_1 \rangle) = C_E(P_0) = U \cap E = E(2^7)$ . Da nach Voraussetzung  $N$  nicht in  $M$  enthalten ist, ist insbesondere  $U$  nicht in  $C$  und damit  $X$  nicht in  $E$  enthalten. Somit gilt  $EX = EC = EP_0$  und  $C = XC_E(X)$ ; außerdem ist  $E \cap X \leq C_E(X) \leq U \cap E$ . Da  $|X| \leq 2^7$  ist, folgt  $|X \cap E| \leq 2^3$  und damit auch  $[X \cap E, \langle f \rangle] = \langle 1 \rangle$ . Da  $EP_0 = UR_1$  von  $f$  normalisiert wird, folgt  $f \in H \cap M$ ; wir wissen ferner aus (3.16) und (3.25), daß  $\langle C_U(f) \cap ccl_j(u_1) \rangle = \langle u_1 \rangle$  ist. Da  $C_X(f) \cap ccl_j(w_1) = \emptyset$  ist, folgt somit dann  $X \cap E \leq \langle u_1 \rangle$ . Dies impliziert  $C = XC_E(X) = XC_E(P_0) = X(U \cap E) = E(2^{11})$ , welches offensichtlich (5.7.c) widerspricht.

Wir haben bisher also gezeigt, daß  $EC$  ein Element aus  $\{E \cdot \langle t \rangle, EP_1, EP_1 \langle t \rangle\}$  ist.

Wir wollen nun zeigen, daß  $EX \cap E \cdot \langle t \rangle = E$  ist. Wir beachten, daß  $C_E(t) = \langle u_1, u_2, w_1, v_1, r_0, u_3 r_1 \rangle = E(2^6)$  und  $F_0 := [E, \langle t \rangle] = C_E(t \text{ mod } \langle u_1 \rangle) = C_E(t) \langle u_5 r_3 d_1 \rangle$  ist mit  $F_0 = \langle u_5 r_3 d_1 \rangle \times \langle u_2, w_1, v_1, r_0, u_3 r_1 \rangle = Z_4 \times E(2^5)$ . Wäre nun  $E \langle t \rangle \leq EX$ , so gäbe es ein Element  $e$  aus  $E$  mit  $et \in C_X(f) \cap E \cdot t$ . Nun ist aber  $et \in ccl_E(t) \cap ccl_j(w_1)$ ; damit erhielten wir den Widerspruch  $C_X(f) \cap ccl_j(w_1) \neq \emptyset$ . Somit folgt also  $EX \cap E \cdot \langle t \rangle = E$ . Insbesondere ist dann  $EX \in \{E, EP_1\}$ .

Wir betrachten nun den Fall, daß  $EP_1 \leq EC \leq EP_1 \langle t \rangle$  ist. Dann ist  $X \cap E \leq C_E(P_1 \text{ mod } \langle u_1 \rangle) = C_E(P_1) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$ ; insbesondere ist  $[X \cap E, \langle f \rangle] = \langle 1 \rangle$  und somit offensichtlich  $EP_1 = EX \leq EC \leq EP_1 \langle t \rangle$ . Daraus folgt  $E \cap X \leq E \cap C = C_E(P_1)$

und  $C_0 := (E \cap C)X \cong E(2^7)$ .

Ist nun  $C > C_0$ , so existiert ein  $e \in E$  mit  $et \in C$ . Nach (5.7.b) ist  $C$  weder zu  $E(2^8)$  noch zu  $Z_4 \times E(2^6)$  isomorph; insbesondere ist dann  $C' \neq \langle 1 \rangle$ . Es folgt nun  $\langle 1 \rangle \neq C' = [C_0, \langle et \rangle] = [E \cap C, \langle et \rangle] \leq \langle u_1, u_2 \rangle$ ; damit erhalten wir aber einen Widerspruch zu (5.7.b).

Es gilt also  $C = C_0 = (E \cap C)X = C_J(X) = C_J(C) \cong E(2^7)$  mit  $E \cap C = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle = C_C(f) \cong E(2^3)$ . Wir wissen schon, daß  $C_J(E \cap C) = R \cdot K_0 \cong \text{Spec}(2^{15}) \cdot \text{Sym}_5$  ist; somit ist dann insbesondere  $C \triangleleft R \leq N_1$  und  $E(2^8) \cong \bar{R} \leq \bar{N}_1$ . Da  $C \cong E(2^7)$  ist, folgt aus (3.19) und (5.7) nun  $\Pi(N_1) \subseteq \{2, 3, 5\}$ .

Es sei nun  $\bar{Q}$  ein minimaler Normalteiler von  $\bar{N}_1$ . Ist  $\bar{Q}$  nicht auflösbar, so gilt offensichtlich  $\bar{Q} \cong \text{Alt}_5$  oder  $\bar{Q} \cong \text{Alt}_6$ ; insbesondere ist dann  $Z_5 = \langle \bar{f} \rangle \in \text{Syl}_5(\bar{Q})$ . Das Frattini-Argument liefert nun, daß in  $N_{N_1}(\langle f \rangle)$  eine Gruppe  $Y$  existiert derart, daß  $Y/(E \cap C) \cong E(2^6)$  ist; dies widerspricht jedoch der Struktur eines Sylow 5-Normalisators in  $J$ . Wir haben damit gezeigt, daß  $\bar{Q}$  stets auflösbar ist.

Wir nehmen nun an, daß  $Q_0 := O_2(N_1) > C$  ist. Da bekanntlich  $C = C_J(C) = C_J(X)$  ist, folgt dann  $X < C$  und außerdem  $Z(Q_0) < C$  sowie  $Z(Q_0) \cap X < X$ . Da  $N$  irreduzibel auf  $X$  operiert und außerdem auch  $Z(Q_0)$  normalisiert, folgt dann  $Z(Q_0) \cap X = \langle 1 \rangle$  und wegen  $[C, \langle f \rangle] = [X, \langle f \rangle] \cong E(2^4)$  somit  $Z(Q_0) \leq E \cap C$ . Mit (5.7.b) folgt dann  $Z(Q_0) = E \cap C \cong E(2^3)$  und somit  $N \leq N_1 \leq N_J(E \cap C) = K$ ; dies ist offensichtlich ein Widerspruch. Also gilt  $O_2(N_1) = O_2(N) = C$ .

Wir haben ferner bewiesen, daß  $\bar{Q}$  eine Gruppe ungerader Ordnung ist und somit insbesondere  $O(\bar{N}_1) \neq \langle 1 \rangle$  ist.

Wir wissen, daß  $[R, \langle f \rangle] = R \leq N_1$  ist; damit ist dann insbesondere  $O_5(\bar{N}_1) = \langle 1 \rangle$ . Da  $O(\bar{N}_1) \neq \langle 1 \rangle$  ist, folgt nun auch, daß  $O_3(\bar{N}_1) \neq \langle 1 \rangle$  ist. Da in 3 Untergruppen der Ordnung  $3^2$  oder  $3^3$  nicht von Elementen der Ordnung 5 normalisiert werden, ist dann offensichtlich  $O_3(\bar{N}_1) = \bar{Q} \cong Z_3$ . Da nun einerseits  $\text{Aut}(Z_3) \cong Z_2$  und andererseits jedoch  $E(2^8) \cong \bar{R} \leq \bar{N}_1$  ist, existieren in  $\bar{N}_1$  nun aber auch noch nichttriviale 3'-Normalteiler; wir haben bereits bewiesen, daß dies nicht der Fall ist.

Aus dem letzten Widerspruch folgt nun, daß  $EC = E \cdot \langle t \rangle$  ist; außerdem ist jetzt auch klar, daß  $X \leq E$  gilt. Es sei daran erinnert, daß  $C_E(t) = \langle u_1, u_2, w_1, v_1, r_0, u_3 r_1 \rangle \cong E(2^6)$  und  $F_0 = [E, t] = C_E(t \bmod \langle u_1 \rangle) = C_E(t) \langle u_3 r_3 d_1 \rangle \cong Z_4 \times E(2^5)$  ist mit  $(u_3 r_3 d_1)^2 = u_1$ ; wir setzen noch  $F_1 = \Omega_1(F_0) = C_E(t)$ .

Es existiert also ein Element  $e$  aus  $E$  mit  $et \in C$ ; da  $E' = \langle u_1 \rangle$  ist, folgt  $X \leq F_0$  und damit dann  $X \leq F_1$ . Mit  $[F_1, \langle t \rangle] = \langle 1 \rangle$  erhalten wir jetzt sogar  $t \in C$ . Also ist  $C = C_0 \cdot \langle t \rangle$  mit  $C_0 = C \cap E = C_E(X)$ . Offensichtlich gilt  $C_0 \geq C_E(F_1) = F_0 \cdot \langle u_3 \rangle > F_0 > F_1 \geq X$ .

Wir beachten nun, daß  $X_0 := \langle u_1 \rangle X$  isomorph zu  $E(2^5)$  oder  $E(2^6)$  ist; ferner gilt  $C_0 = C_E(X) = C_E(X_0)$  und somit  $|C_0| = 2^{14} / |X_0| \in \{2^8, 2^9\}$ . Insbesondere ist  $(C_0)' = \langle u_1 \rangle$ .

Wir setzen nun  $\tilde{C} = C / \langle u_1 \rangle$  und benutzen die sogenannte "bar-convention" für Elemente und Untergruppen von  $C$ . Offensichtlich ist  $(\tilde{C}') = (\tilde{C})' = [\tilde{C}_0, \langle \tilde{t} \rangle] = \tilde{C}_0 / C_{\tilde{C}_0}(\tilde{t}) = \tilde{C}_0 / \bar{F}_0 = C_0 / F_0 \cong E(2^m)$  mit  $m \in \{1, 2\}$ . Da es in  $N$  keine abelschen Normalteiler der Ordnung 2 oder 4 gibt, ist dann also  $\langle u_1 \rangle \leq C' \cong E(2^3)$  und damit  $|C_0| = 2^9$  sowie  $|X_0| = 2^5$ .

Wir haben also gezeigt, daß  $C'$  ein elementar-abelscher Normalteiler der Ordnung 8 von  $N$  ist. Offensichtlich gilt nun auch  $[C', \langle f \rangle] = \langle 1 \rangle$ ; insbesondere ist  $C_J(C')$  keine 2-Gruppe. Nach (5.6) ist dann  $N_J(C')$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert. Da  $N \leq N_J(C')$  ist, haben wir schließlich einen Widerspruch erhalten. Damit folgt dann die Behauptung des Lemmas.

Q.E.D.

(5.9) Lemma. Ist  $X$  eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung 8 von  $J$ , so ist  $N_J(X)$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert.

Beweis. Es sei also  $E(2^3) \cong X \leq J$ ,  $N = N_J(X)$  und  $C = C_J(X)$  sowie  $Z = Z(C)$ . Wir nehmen im folgenden an, daß  $N$  in  $J$  nicht zu einer Untergruppe von  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert ist; offensichtlich ist dann  $X$  bzgl. dieser Eigenschaft von minimaler Ordnung. Nach (5.7) gilt also folgendes:

(1) Es ist  $C = O_2(N)$ . Ferner operiert  $N$  irreduzibel auf  $X$ ; insbesondere ist dann  $N/C$  isomorph zu  $Z_7, F_{21}$  oder  $L_3(2)$ . Für  $\langle q \rangle \in \text{Syl}_7(N)$  ist  $C_2(q) = \langle 1 \rangle$ .

(2) Ist  $E(2^m) = Y \leq C$ , so gilt  $m \leq 8$ ; ist  $Y$  sogar ein Normalteiler von  $N$ , so gilt  $3 \leq m \leq 7$  oder  $m = 0$ .

Da es in  $J$  genau zwei Konjugiertenklassen von Involuntionen gibt, ist dann offensichtlich entweder  $X^* \leq \text{ccl}_J(u_1)$  oder  $X^* \leq \text{ccl}_J(w_1)$ .

Im folgenden betrachten wir zunächst den Fall, daß  $X$  in  $\text{ccl}_J(u_1)$  enthalten ist. Wir können dann o.B.d.A. annehmen, daß  $\langle u_1 \rangle \leq X \leq C \leq H$  ist.

Ist  $X \leq O_2(H) = E$ , 'so können wir nach (3.27.b) dann o.B.d.A. annehmen, daß  $X = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$  oder  $X = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$  oder  $X = \langle u_1, u_2, u_5 v_1 r_0 \rangle$  ist. In jedem Falle gilt dann aber  $X \leq U$  und somit  $E(2^{11}) \approx U \leq C$ ; dies widerspricht (2). Also ist  $X$  nicht in  $E$  enthalten.

Aus (3.11) folgt nun, daß  $X = \langle u_1, x_1, x_2 \rangle \leq H'$  ist, wobei o.B.d.A.  $x_1 = u_6 v_1 r_0 \in H' - E$  ist. Wir vermerken, daß  $C_H(x_1) = U \cdot \langle r_0, t_1 \rangle \times \langle r_0 r_1 d_2, r_0 d_1 t_2, s_3, s_2 \rangle$  ist. Da  $\langle u_1, x_1 \rangle \leq U$  und  $X \not\leq U$  ist, folgt  $x_2 \in C_H(x_1) - U$ . Da  $U \cdot r_0 \cap \text{ccl}_J(u_1) = \text{ccl}_U(r_1) = [U, r_0] \cdot r_0$  ist, folgt ferner, daß  $x_2$  nicht in  $U \cdot r_0$  enthalten ist. Somit können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $x_2 \in U \cdot y$  ist mit einem geeigneten Element  $y$  aus  $\{r_0 r_1 d_2, s_2, r_1 d_2, r_0 s_2\}$ . Wir beachten, daß stets  $U \cdot y \cap \text{ccl}_J(u_1) = \text{ccl}_U(y) = [U, y] \cdot y$  ist; somit können wir sogar o.B.d.A. annehmen, daß  $x_2 = y$  ist. Mit Hilfe der Relationen in (3.4) sehen wir nun leicht, daß  $x_1$  weder in  $[U, s_2] = \langle u_2, u_4, w_2, u_6 v_3 d_2 \rangle$  enthalten ist noch in der Gruppe  $[U, r_1 d_2] = \langle u_1, u_2, u_4, w_1 u_6 v_1 r_0, w_1 v_3 d_2 \rangle$ . Somit folgt dann also  $x_2 \in \{r_0 r_1 d_2, r_0 s_2\}$ .

Mit den Relationen aus (3.4) berechnen wir außerdem, daß  $C_U(r_0 r_1 d_2) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_6 v_1 r_0, u_6 v_3 d_2 \rangle \approx E(2^6)$  und  $[U, r_0 r_1 d_2] = \langle u_1, u_2, u_4, u_6 v_1 r_0, u_3 u_6 v_3 d_2 \rangle \approx E(2^5)$  sowie  $C_U(r_0 s_2) = \langle u_1, u_2, u_4, u_6, v_1 r_0, u_3 v_3 d_2 \rangle \approx E(2^6)$  und  $[U, r_0 s_2] = \langle u_1, u_2, u_4, u_6 v_1 r_0, u_3 u_6 v_3 d_2 \rangle \approx E(2^5)$  ist. Ferner gilt  $C_H(x_1, r_0 r_1 d_2) = C_U(r_0 r_1 d_2) \cdot \langle r_0, r_1 d_2, d_1 t_2, s_2, t_1 \rangle$



und  $C_H(x_1, r_0 s_2) = C_U(r_0 s_2) \cdot \langle r_0, r_1 d_2, s_2, t_1 \rangle$ . Da nach (3.8) stets  $C_J(C_U(y)) = U \cdot \langle y \rangle$  ist, berechnen wir nun mit den Relationen aus (3.4) leicht, daß in jedem Falle dann  $Z(C) = \langle u_1, u_2, u_6 v_1 r_0, x_2 \rangle = \langle u_2 \rangle \times X \cong E(2^n)$  ist. Dies widerspricht aber offensichtlich der Tatsache, daß  $C_2(q) = \langle 1 \rangle$  ist für  $\langle q \rangle \in \text{Syl}_7(N)$ . Es folgt damit:

$$(3) \quad X^* \leq \text{ccl}_J(w_1).$$

Wir können im folgenden also o.B.d.A. annehmen, daß  $\langle w_1 \rangle \leq X \leq C \leq H_1 = U \cdot M_1 = C_J(w_1)$  ist. Wir setzen ferner  $X_0 = X \cap U$  sowie  $T_1 = E_2 \cdot \langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2 \rangle$  und  $T_2 = T_1 \cdot \langle r_1 \rangle$ ; es sei daran erinnert, daß  $S_2 = U \cdot T_2$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $H_1$  ist und daß  $U \cdot T_1 = S_2 \cap (H_1)'$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $(H_1)'$  ist.

Da  $U$  nicht in  $C$  enthalten ist, ist dann auch  $X$  nicht in  $U$  enthalten; also ist  $|X_0| \leq 4$ . Wir nehmen nun an, daß  $X_0 \cong E(2^2)$  ist. Nach (3.25) gilt dann o.B.d.A.  $X_0 = \langle w_1, w_2 \rangle$  mit  $C_J(X_0) = U \cdot G$  und  $G \cong L_3(4)$ . Da  $G$  genau eine Konjugiertenklasse von Involutionen hat und da  $UE_2 \leq U \cdot G$  ist, können wir dann annehmen, daß  $X = X_0 \cdot \langle u r_0 \rangle$  ist mit einem geeigneten  $u \in U$ . Wir beachten nun, daß  $C_U(r_0) = [U, r_0] \times X_0 \times \langle u_5 \rangle$  ist; damit folgt sodann, daß o.B.d.A.  $X = \langle w_1, w_2, u_5 r_0 \rangle$  ist, denn  $r_0$  ist in  $J$  zu  $u_1$  konjugiert. Mit den Relationen aus (3.4) sehen wir nun, daß  $v_2 r_2 r_3 d_1: w_1 \rightarrow w_1, w_2 \rightarrow w_1 w_2, u_5 r_0 \rightarrow u_5 r_0$  gilt; somit ist  $v_2 r_2 r_3 d_1$  eine Involution aus  $N - C$ . Damit ist nun klar, daß  $N/C \cong L_3(2)$  ist. Also existiert ein Element  $g \in N - C$  mit  $o(g) = 3$  und  $C_X(g) = \langle w_1 \rangle$ . Dann ist aber

$g \in N \cap H_1$ ; insbesondere normalisiert  $g$  dann  $X_0$ . Damit folgt dann mit einem Satz von Maschke  $[X, \langle g \rangle] = \langle 1 \rangle$ , also  $g \in C$ . Da aber andererseits  $C = O_2(N)$  ist, haben wir einen Widerspruch erhalten. Somit gilt also

$$(4) \quad X_0 = X \cap U = \langle w_1 \rangle \cong Z_2.$$

Da  $H_1/(H_1)' \cong Z_2$  ist, können wir nun o.B.d.A. annehmen, daß  $X = \langle w_1, x_1, x_2 \rangle$  ist mit  $x_1 \in (H_1)' - U$  und  $x_2 \in H_1 - U$ . Nach (3.12) gibt es in  $(H_1)' - U$  genau eine  $H_1$ -Klasse von Involutionen  $x$  derart, daß  $x\langle w_1 \rangle \subseteq \text{ccl}_J(w_1)$  ist; ferner gilt dann  $C_{H_1}(x) \cong E(2^{1^0}) \cdot E(2^4)$ . Da  $u_5 v_1 \in \text{ccl}_J(w_1)$  ist mit  $[u_5 v_1, s_2 t_2 r_2] = w_1$  sowie  $u_5 v_1 \in (H_1)' - U$ , können wir also o.B.d.A.  $x_1 = u_5 v_1$  annehmen. Dann ist außerdem  $C_J(w_1, x_1) = V \cdot Y$  mit  $Y = \langle r_0, r_2 r_1 s_1, r_1 r_3 d_1, r_1 r_2 \rangle \cong E(2^4)$ .

Existiert ein Element  $v \in V$  mit  $vr_0 \in X$ , so ist wegen  $v \in C_V(r_0) = U_0 \langle v_1 \rangle$  dann o.B.d.A.  $v \in U_0$  und damit dann  $x_1 \cdot vr_0 = u_5 v \cdot v_1 r_0 \in X \cap U = X_0 = \langle w_1 \rangle$ ; dies ist jedoch absurd. Da es in  $C$  keine elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung  $2^{1^0}$  gibt, ist  $X$  nicht in  $V$  enthalten; somit ist dann also  $x_2 \in V \cdot Y - V \cdot \langle r_0 \rangle$ .

Wir setzen nun  $C_0 = C_V(x_2) \cdot \langle x_2 \rangle$ . Nach (3.8) ist dann  $C_0 = C_J(C_0) \cong E(2^m)$  mit  $m \in \{7, 8\}$  sowie  $C_J(C_0 \cap V) = V \cdot \langle x_2 \rangle$ ; außerdem ist  $N_J(C_0)$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $L$  oder  $M$  konjugiert. Damit folgt also  $C_0 < C$ . Insbesondere ist dann  $C/C_V(x_2) \cong (VC)/V \cong E(2^n)$  mit  $n \in \{2, 3, 4\}$ .

Ist nun  $n = 2$ , so folgt  $C = C_0 \langle x \rangle$  mit  $x^2 \in C_V(x_2)$ ; die Existenz eines Elementes der Ordnung 7 in  $N$  erzwingt nun  $Z(C) = C_{C_0}(x) \cong E(2^6)$  und damit  $C' = [C_0, \langle x \rangle] \cong E(2^{m-6})$ . Damit erhalten wir einen Widerspruch zu (2). Wir haben also gezeigt, daß  $3 \leq n \leq 4$  ist.

Wir beachten nun, daß  $C_V(Y) = \langle u_1, w_1, x_1 \rangle \leq Z(C)$  ist. Da  $C_J(C_0) = C_0 \leq C$  gilt, ist dann  $Z(C) = C_V(x_2, C) \times \langle x_2 \rangle$  ein elementar-abelscher Normalteiler von  $N$ , welcher in  $C_0$  enthalten ist. Mit (1) folgt jetzt  $Z(C) \cong E(2^6)$ ; insbesondere ist also  $C_V(x_2, C) = C_V(C) = C_V(VC) \cong E(2^5)$ .

Nun ist außerdem klar, daß  $n = 3$  und  $|VY : VC| = 2$  ist. Somit existiert ein Element  $x$  aus  $r_1 r_2 \langle r_0 \rangle$  mit  $x \in VC$ . Also ist  $C_V(x) \leq C_V(x) \leq V \cap E$ . Da  $Y \cong E \cong Ex(2^{1,2})$  ist, folgt nun aber auch, daß  $|C_V(Y \cap CV) : C_V(Y)| \leq 2$  ist; damit erhalten wir dann  $|C_V(Y)| \geq 2^4$ . Dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß  $C_V(Y) = \langle u_1, w_1, x_1 \rangle \cong E(2^3)$  gilt.

Mit dem letzten Widerspruch haben wir schließlich das Lemma bewiesen.

Q.E.D.

(5.10) Lemma. Ist  $X$  eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung 16 von  $J$ , so ist  $N_J(X)$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert.

Beweis. Es sei  $E(2^4) \cong X \leq J$ ,  $N = N_J(X)$  und  $C = C_J(X)$  sowie  $\bar{N} = N/C$ . Wir nehmen an, daß  $N$  in  $J$  nicht zu einer Untergruppe von  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert ist; offensichtlich ist  $X$  bzgl. dieser Eigenschaft von minimaler Ordnung. Mit (5.7) und (5.9) erhalten wir nun die folgenden Aussagen:

(1) Es ist  $C = O_2(N)$  und  $\Pi(N) \leq \{2, 3, 5\}$ ; ferner operiert  $N$  irreduzibel auf  $X$ .

(2) Ist  $E(2^m) \cong Y \leq C$ , so gilt  $m \leq 8$ ; ist  $Y$  sogar ein Normalteiler von  $N$ , so gilt  $4 \leq m \leq 7$  oder  $m = 0$ .

Eine Inspektion der Untergruppen von  $GL_4(2) \cong Alt_8$ , welche irreduzibel auf einem 4-dimensionalen Standardmodul von  $GL_4(2)$  operieren, liefert den möglichen Isomphietyp von  $\bar{N}$ ; das Resultat ist wie folgt:

(3) Es gilt genau eine der folgenden Aussagen:

- (a)  $\bar{N}$  ist isomorph zu  $Sym_6$ ,  $Alt_6$ ,  $Sym_5$ ,  $Alt_5$ ,  $Z_3 \times Alt_5$  oder  $(Z_3 \times Alt_5) \cdot Z_2$ .
- (b) Es ist  $Z_5 \trianglelefteq \bar{N} \trianglelefteq (Z_3 \times Z_5) \cdot Z_4$ .
- (c) Es ist  $E(3^2) \cdot Z_2 \trianglelefteq \bar{N} \trianglelefteq E(3^2) \cdot D_8$  und  $N$  induziert eine Bahn der Länge 9 und eine Bahn der Länge 6 auf  $X$ .

Wir wollen nun zunächst zeigen, daß  $X = Z(C)$  ist; wir nehmen daher an, daß  $Q := \Omega_1(Z(C)) > X$  ist. Aus (2), (3) und (5.8) folgt dann  $E(3^2) \cdot Z_2 \trianglelefteq \bar{N} \trianglelefteq E(3^2) \cdot D_8$ . Es sei nun  $P \in Syl_3(N)$ . Da  $C_X(P) = \langle 1 \rangle$  und außerdem  $C_Q(P) \trianglelefteq N$  ist, folgt aus (2) offensichtlich  $C_Q(P) = \langle 1 \rangle$ ; insbesondere ist dann also  $Q \cong E(2^6)$ .

Wir setzen nun  $\bar{N} = N/X$ ; also ist  $E(2^2) \cong \bar{Q} \trianglelefteq \bar{N}$ . Wegen  $C_{\bar{Q}}(P) = \langle 1 \rangle$  und  $Aut(\bar{Q}) \cong Sym_3$  existiert eine Untergruppe  $P_0$  von  $P$  mit  $Z_3 \cong P_0 \cong \bar{P}_0 = O_3(\bar{N})$ . Nun ist klar, daß  $Q_0 := C_Q(P_0) \cong E(2^2)$  und  $Q = Q_0 X$  gilt. Da mit  $Q \cdot P_0$  auch  $Q_0$  ein Normalteiler von  $N$  ist, folgt mit (2) und der irreduziblen Operation von  $N$  auf  $X$  dann  $X \leq Q_0$  und somit  $P_0 \leq C = O_2(N)$ ; das ist unmöglich. Dieser Widerspruch zeigt also, daß  $X = \Omega_1(Z(C))$  ist.

Da es in  $J$  nach (3.29) keine zu  $Z_4 \times Z_4 \times Z_4 \times Z_4$  isomorphen Untergruppen gibt und da außerdem  $N$  irreduzibel auf  $X$  operiert, folgt aus  $X = \Omega_1(Z(C))$  nun auch

$$(4) \quad X = Z(C) .$$

Es sei daran erinnert, daß  $S$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $J$  ist mit  $Z(S) = \langle u_1 \rangle$ . Da  $C$  eine 2-Gruppe ist mit  $C_J(Z(C)) = C$ , gilt dann offensichtlich auch

$$(5) \quad X \cap \text{ccl}_J(u_1) \neq \emptyset .$$

Wir betrachten nun den Fall, daß  $X \leq Y \leq J$  ist mit  $Y \cong \text{Ex}(2^{13})$  und  $Z(Y) \leq X$ . Wir können also o.B.d.A annehmen, daß  $\langle u_1 \rangle = Z(E) \leq X \leq E$  ist; insbesondere ist dann  $E \leq N$  mit  $E(2^3) \cong \bar{E} \leq \bar{N}$ . Aus (3) folgt jetzt  $\bar{N} \cong \text{Sym}_6$ . Nun ist aber  $(\bar{N})' \cap \bar{E} = E(2^2)$ . Da  $(\bar{N})' \cong \text{Alt}_6$  ist, gibt es in  $(\bar{N})'$  genau eine Konjugiertenklasse von Involutionen; da offensichtlich  $C_X(\bar{e}) \cong E(2^3)$  ist für Involutionen  $\bar{e} \in \bar{E}$ , gilt dann natürlich auch  $C_X(\bar{x}) \cong E(2^3)$  für jede Involution  $\bar{x} \in (\bar{N})'$ . Da aber  $(\bar{N})'$  eine Diedergruppe der Ordnung 10 enthält und Elemente der Ordnung 5 fixpunktfrei auf  $X$  operieren, erhalten wir nun offensichtlich einen Widerspruch. Somit gilt folgendes:

(6) Ist  $Y$  eine extraspezielle Untergruppe der Ordnung  $2^{13}$  von  $J$  mit  $X \leq Y$ , so ist  $X \cap Z(Y) = \langle 1 \rangle$ .

Im folgenden Abschnitt beweisen wir die folgende Behauptung:

(7) Ist  $E(2^{11}) \cong Y \leq J$  mit  $X \leq N_J(Y)$ , so gilt  $X \cap Y \leq E(2^2)$ .

Um (7) zu beweisen, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $C \leq M$  ist und daß  $X_0 := X \cap U \cong E(2^3)$  ist. Da  $U$  nicht in  $C$  enthalten ist, gilt dann offensichtlich  $X_0 \cong E(2^3)$ . Ferner sei  $r$  eine Involution aus  $X - X_0$ . Da  $Ur_0$  und  $Ur_1r_2$  Repräsentanten der beiden konjugierten Klassen von Involutionen in  $M/U$  sind, können wir außerdem o.B.d.A. annehmen, daß  $Ur = Ux$  ist für ein  $x \in \{r_0, r_1r_2\}$ . Da  $X_0$  kein Normalteiler von  $N$  ist, ist dann  $X \cap \text{ccl}_J(u_1) \not\leq X_0$ ; also können wir ferner o.B.d.A. annehmen, daß  $r \in \text{ccl}_J(u_1)$  und somit  $r \in Ux \cap \text{ccl}_J(u_1) = \text{ccl}_U(x)$  bzw.  $r = x$  ist. Wir beachten nun, daß  $Y_2 := C_U(r_1r_2) \cdot R_1R_2 \cdot \langle t_1t_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_M(r_1r_2)$  ist mit  $Z(Y_2) = \langle u_1, r_1r_2 \rangle$  sowie  $C_U(r_1r_2) \leq U \cap E$  und  $C_U(r_1r_2) \times \langle r_1r_2 \rangle \leq E$ . Da  $X = Z(C_J(X))$  ist, sehen wir mit (6) nun leicht, daß  $x = r_0$  ist. Also gilt  $X = X_0 \times \langle r_0 \rangle \cong E(2^4)$  mit  $X_0 \leq C_U(r_0)$ .

Wir beachten nun, daß  $C_U(r_0) = U_0 \cdot \langle v_1r_0 \rangle \cong E(2^7)$  und  $C_M(r_0) = C_U(r_0) \cdot E_1E_2 \cdot A_0 = W \cdot (\langle v_1r_0 \rangle \times \langle r_1, d_1, t_1 \rangle \cdot A_0)$  ist. Ferner ist  $T_0 = C_U(r_0) \cdot T \in \text{Syl}_2(C_M(r_0))$  mit  $Z(T_0) = \langle u_1, r_0 \rangle$ . Da  $U_0 \langle r_0 \rangle \leq W \not\leq C$  gilt, ist  $X_0 \not\leq U_0$ . Wir beachten, daß  $(C_M(r_0) \# (C_U(r_0) - U_0)) = 8v_1r_0 + 56w_1v_1r_0$  gilt; also können wir o.B.d.A. annehmen, daß es ein  $v \in \{v_1r_0, w_1v_1r_0\}$  gibt mit  $v \in X_0$ .

Wir berechnen nun  $C_{T_0}(v_1r_0) = C_U(r_0) \cdot E_1 \cdot \langle r_3, s_1, s_2 \rangle$  und  $C_{T_0}(w_1v_1r_0) = C_U(r_0) \cdot \langle r_0, r_1, r_2r_3, r_3d_1, s_1, t_1s_2, t_1d_2 \rangle$ ; insbesondere ist dann also  $C_{T_0}(v)$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_M(r_0, v)$ . Ferner gilt  $Z(C_{T_0}(v)) = \langle u_1, v, r_0 \rangle$ . Wir können somit o.B.d.A. annehmen, daß  $\langle u_1, v, r_0 \rangle \leq X$  und  $C \leq C_{T_0}(v)$  ist.

Nun ist klar, daß  $X = \langle u_1, v, w, r_0 \rangle$  ist mit einem Element  $w \in U_0$ . Wir beachten, daß  $X_1 := \langle u_1, v, r_0 \rangle \not\leq E$  und  $U_0 = (U_0 \cap E) \cdot \langle u_6 \rangle$  mit  $U_0 \cap E = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle$  ist; aus (6) folgt nun offensichtlich  $w \in (U_0 \cap E) \cdot u_6$ . Da nun  $X_1 \not\leq E$  und  $(U_0 \cap E) \cdot u_6 = \text{ccl}_E(u_6) \cup \text{ccl}_E(w_2)$  ist sowie  $w_2 = u_1 u_6$ , können wir also annehmen, daß  $w = w_2$  ist. Somit gilt dann  $X = \langle u_1, u_6, r_0, v \rangle$  mit  $v \in \{v_1 r_0, w_1 v_1 r_0\}$ .

Mit Hilfe der Relationen in (3.2) - (3.4) sowie der Resultate in (3.6) bestimmen wir nun  $I := X \cap \text{ccl}_J(u_1)$ . Es ist  $I_0 := \langle u_1, u_6, r_0 \rangle \cap \text{ccl}_J(u_1) = \{u_1, u_6, r_0, u_1 r_0\}$ . Für  $v = v_1 r_0$  gilt dann  $I - I_0 = \{v_1, u_6 v_1 r_0\} \cdot \langle u_1 \rangle$ ; für  $v = w_1 v_1 r_0$  ist  $I - I_0 = \{w_1 v_1 r_0, u_6 w_1 v_1 r_0\} \cdot \langle u_1 \rangle$ . Also gilt in jedem Falle  $|I| = 8$ .

Nun erhalten wir offensichtlich mit (3) einen Widerspruch; damit ist (7) bewiesen.

Da  $C$  eine 2-Gruppe ist, können wir zur Bestimmung der Struktur von  $C'$  dann o.B.d.A. annehmen, daß  $C \leq S$  ist. Da  $N$  irreduzibel auf  $X = Z(C)$  operiert und  $S'' \leq U \cdot \langle r_0 \rangle$  ist, folgt aus (7) zunächst  $C'' = \langle 1 \rangle$ . Ist nun  $x \in X - U$ , so gilt  $E(2^6) \leq C_U(x) \leq E(2^7)$ ; damit verifizieren wir nun leicht, daß stets  $|C_U(x)x| \geq 2^5$  ist. Insbesondere ist dann  $X = Z(C)' \leq C$  und somit  $C' \neq \langle 1 \rangle$ . Die irreduzible Operation von  $N$  auf  $X$  impliziert nun  $X = Z(C) \leq C'$ . Da es in  $J$  keine zu  $Z_4 \times Z_4 \times Z_4 \times Z_4$  isomorphen Untergruppen gibt, erhalten wir mit (2) dann die folgende Behauptung:

(8) Es ist  $X = Z(C) \leq C' \leq E(2^7)$ .

Im nächsten Abschnitt wollen wir die folgende Behauptung beweisen:

(9) Ist  $Y = C_J(Y) \cong E(2^{10})$  und  $X \leq N_J(Y)$ , so gilt  $X \cap Y \leq E(2^2)$ .

Um (9) zu beweisen, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $X \leq L = N_J(V)$  und  $X_0 = X \cap V \cong E(2^3)$  ist. Also ist dann  $X = X_0 \times \langle r \rangle$  mit einer Involution  $r \in L - V$ . Nach (3.8) können wir dann ferner annehmen, daß  $r \in Vr_0$  oder aber  $r \in Vr_1r_2$  ist. Wegen  $C_V(r_0) \cdot \langle r_0 \rangle = C_U(r_0) \cdot \langle r_0 \rangle \leq U \cdot \langle r_0 \rangle$  folgt mit (7) dann offensichtlich  $r \in Vr_1r_2$ . Da nach (2) außerdem  $X_0$  kein Normalteiler von  $N$  ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $r \in ccl_J(u_1)$  ist. Mit Hilfe von (3.8.d) sehen wir nun leicht, daß o.B.d.A.  $r = r_1r_2$  gilt. Wir beachten, daß  $C_L(r_1r_2) = C_V(r_1r_2) \cdot R_1R_2 \cdot \langle a_1a_2, t_1t_2 \rangle$  ist, wobei  $T_0 := C_V(r_1r_2) \cdot R_1R_2 \cdot \langle t_1t_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_L(r_1r_2)$  ist mit  $Z(T_0) = \langle u_1, r_1r_2 \rangle$ . Somit gilt also o.B.d.A.  $Z(T_0) \leq X \leq C \leq T_0$ . Nun folgt jedoch  $\langle u_1 \rangle \leq X \leq C_V(r_1r_2) \cdot \langle r_1r_2 \rangle \leq E \cong Ex(2^{13})$ ; da  $Z(E) = \langle u_1 \rangle$  ist, erhalten wir einen Widerspruch zu (6). Damit haben wir (9) bewiesen.

Wir nehmen nun an, daß  $\langle w_1 \rangle \leq X \leq C \leq H_1 = U \cdot M_1$  ist. Wir beachten, daß  $S_2 = U \cdot E_2 \cdot \langle r_1, r_3d_1, s_1, t_1s_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $H_1$  ist mit  $Z(S_2) = \langle u_1, w_1 \rangle$ . Mit (7) erhalten wir offensichtlich  $X \cap U \cong E(2^2)$ . Da bekanntlich  $(H_1)' / U \cong M_{22}$  genau eine Konjugiertenklasse von Involutionen hat und da  $|H_1 : (H_1)'| = 2$  gilt, können wir annehmen, daß  $X > (X \cap U) \cdot \langle r \rangle$  ist mit  $r \in C_U(r_0) \cdot r_3$ .



Da  $S_2$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_{H_1}(r_0 \bmod U)$  ist, gilt dann o.B.d.A.  $\langle u_1, w_1, r \rangle \leq X \leq C \leq S_2$ .

Wir beachten nun, daß  $s \in S_2$  ist mit  $[s, r_0] = v_1 r_0$ ; da  $C_U(r_0) = U_0 \cdot \langle v_1 r_0 \rangle$  ist, können wir dann o.B.d.A. noch annehmen, daß  $r \in U_0 \cdot v_1$  ist. Insbesondere erhalten wir also  $X \cap V \geq \langle u_1, w_1, r \rangle$ . Da  $V$  nicht in  $C$  enthalten ist, gilt sogar  $X \cap V = \langle u_1, w_1, r \rangle$ .

Man beachte, daß  $S_3 := S_2 \cap L = VE_2 \cdot \langle r_1, r_3 d_1, s_1, t_1 s_2 \rangle$  ist mit  $S_2 = S_3 \cdot \langle s \rangle$ ; ferner gilt  $[S_3, \langle r_0 \rangle] = [V, \langle r_0 \rangle] = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$  und  $[S_3, \langle v_1 \rangle] = [S_3, \langle r_0 \rangle]$ . Damit ist klar, daß  $X \leq C \leq S_3 \leq N_J(V)$  gilt. Jetzt erhalten wir jedoch offensichtlich einen Widerspruch zu (9). Somit gilt dann

$$(10) \quad X \cap \text{ccl}_J(w_1) = \emptyset.$$

Wir sind nun in der Lage, einen endgültigen Widerspruch herzuleiten. Da  $C$  eine 2-Gruppe ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $C \leq S \in \text{Syl}_2(J)$  ist. Mit  $X = Z(C_J(X))$  und  $Z(S) = \langle u_1 \rangle$  erhalten wir dann also  $\langle u_1 \rangle \leq X$ . Es sei nun  $x \in X - \langle u_1 \rangle$ ; wegen (10) gilt dann  $x \cdot \langle u_1 \rangle \leq \text{ccl}_J(u_1)$ . Aus (3.11) sehen wir nun, daß  $x$  in  $H$  konjugiert ist zu  $u_2$  oder  $u_6 v_1 r_0$ ; ferner ist  $T_0 := U \cdot \langle r_0, r_1 d_2, d_1 t_2, s_2, t_1 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_H(u_6 v_1 r_0)$  und außerdem gilt  $(T_0)' \leq U \cdot \langle r_0 r_1 d_2 \rangle$ . Mit Hilfe von (7) und (8) sehen wir nun leicht, daß  $x \in \text{ccl}_H(u_2)$  ist. Dann ist aber insbesondere  $\langle u_1 \rangle = Z(E) \leq X \leq \langle u_1, \text{ccl}_H(u_2) \rangle = E$ . Dies widerspricht jedoch der Aussage in (6).

(5.11) Lemma. Ist  $E(2^5) \approx X \leq J$ , so ist  $N_J(X)$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert.

Beweis. Es sei  $N = N_J(X)$  und  $C = C_J(X)$ . Operiert  $N$  nicht irreduzibel auf  $X$ , so folgt die Behauptung aus (5.5), (5.9) und (5.10). Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß  $N$  irreduzibel auf  $X$  operiert. Aus (1.1) folgt nun die Existenz eines Elementes  $y$  aus  $N$  mit  $o(y) = 31$ . Mit (3.20) erhalten wir jetzt  $C \in \text{ccl}_J(V)$ . Damit ist dann natürlich  $N$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $L$  konjugiert.

Q.E.D.

(5.12) Lemma. Ist  $E(2^6) \approx X \leq J$ , so ist  $N_J(X)$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert.

Beweis. Es sei  $E(2^6) \approx X \leq J$ ,  $N = N_J(X)$ ,  $C = C_J(X)$  und  $\bar{N} = N/C$ . Wir nehmen an, daß  $N$  in  $J$  nicht zu einer Untergruppe von  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert ist; offensichtlich hat  $X$  bzgl. dieser Eigenschaft minimale Ordnung. Da  $\Pi(L_6(2)) = \{2, 3, 5, 7, 31\}$  ist, erhalten wir nun mit (3.19) und (5.5) - (5.11) die folgenden beiden Aussagen:

(1) Es ist  $C = O_2(N)$  und  $\Pi(N) \leq \{2, 3, 7\}$ ; ferner operiert  $N$  irreduzibel auf  $X$ .

(2) Ist  $Y \neq \langle 1 \rangle$  eine elementar-abelsche Untergruppe von  $C$ , so gilt  $|Y| \leq 2^8$ ; ist außerdem  $Y$  ein Normalteiler von  $N$ , so ist  $E(2^6) \approx X \leq Y \leq E(2^7)$ .

Wir nehmen nun an, daß  $Q := \Omega_1(Z(C)) > X$  ist. Nach (2) ist dann  $Q = E(2^7)$ . Mit (5.7) folgt jetzt  $\Pi(N) = \{2, 3\}$ . Da  $C = O_2(N)$  ist, gilt dann  $O_3(\bar{N}) \neq \langle 1 \rangle$ ; somit existiert also eine 3-Gruppe  $P \neq \langle 1 \rangle$  derart, daß  $\bar{P} = O_3(\bar{N})$  ist. Offensichtlich ist  $Q_0 := C_Q(P) \neq \langle 1 \rangle$ . Das Frattini-Argument liefert jetzt  $Q_0 \trianglelefteq N$ ; aus (2) folgt dann  $X \leq Q_0$  und damit  $P \leq C$ . Dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß  $C$  eine 2-Gruppe ist. Also gilt  $Q = X$ . Da es in  $J$  keine Untergruppen isomorph zu  $Z_4 \times Z_4 \times Z_4 \times Z_4$  gibt und da  $N$  irreduzibel auf  $X$  operiert, folgt nun

$$(3) \quad X = Z(C) .$$

Im nächsten Abschnitt wollen wir die folgende Behauptung beweisen:

(4) Ist  $E(2^{11}) \cong Y \leq J$  und  $C \leq N_J(Y)$ , so gilt  $|YX : Y| \geq 4$  und damit  $X \cap Y \leq E(2^4)$ .

Um (4) zu beweisen, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $C \leq N_J(U) = M$  ist. Da  $U$  nicht in  $C$  enthalten ist, kann auch  $X$  nicht in  $U$  enthalten sein. Wir nehmen daher an, daß  $UX = U \cdot \langle r \rangle$  ist mit einer Involution  $r \notin M - U$ . Da  $Ur_0 = U \cdot v_1$  und  $Ur_1 r_2$  Repräsentanten der beiden Klassen von Involuntionen in  $M/U$  sind, können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $r \in \{v_1, r_1 r_2\}$  ist.

Wir setzen nun  $T_0 = R_1 R_2 \cdot \langle t_1 t_2 \rangle$ ; dann ist  $S_0 := U \cdot T_0$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_M(r_1 r_2 \bmod U)$  und  $S = U \cdot T$  ist eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_M(v_1 \bmod U)$ . Ferner gilt  $|S : S_0| = 2$  und  $Z(S_0) = Z(S) = \langle u_1 \rangle$ . Wir können nun also o.B.d.A. annehmen, daß  $\langle u_1 \rangle \leq X \leq C \leq C_5(r \bmod U) \leq S$  ist.

Wir setzen nun  $X_0 = X \cap U$ ; dann ist also  $X_0 \cong E(2^6)$  und somit insbesondere kein Normalteiler von  $N$ . Nun ist klar, daß  $\text{ccl}_J(u_1) \cap X$  nicht in  $X_0$  enthalten ist; wir können dann wegen  $Ur \cap \text{ccl}_J(u_1) = \text{ccl}_U(r) = [U, r] \cdot r$  also annehmen, daß  $r \in X$  ist.

Wir beachten, daß  $C \geq C_U(r) \cdot \langle r \rangle \cong E(2^7)$  ist; insbesondere gilt dann  $C > X = Z(C)$  und somit  $C' \neq \langle 1 \rangle$ . Offensichtlich gilt jetzt auch  $X = Z(C) \leq C'$ . Damit erhalten wir dann  $X \leq (C_S(r))'$ .

Mit Hilfe der Relationen aus (3.2) - (3.4) berechnen wir nun  $C_S(r_1 r_2) = C_U(r_1 r_2) \cdot T_0$  und  $C_S(r_1 r_2)' = [C_U(r_1 r_2), T_0] \cdot T_0'$ ; da  $[C_U(r_1 r_2), T_0] = \langle u_1, u_2, u_4, u_3 u_5 v_1 r_0 \rangle \cong E(2^4)$  ist, folgt nun wegen  $X_0 \cong E(2^5)$  also  $r = v_1$ . Folglich gilt dann  $C \leq C_S(v_1) = C_U(v_1) \cdot T_1 = C_U(r_0) \cdot T_1 = V \cdot \langle r_0 \rangle \times T_1$ , wobei  $T_1 := \langle r_1, r_3, d_1, s_1, t_1, s_2 \rangle$  ist. Offensichtlich gilt nun  $X_0 \leq C' \cap U \leq [C_U(r_0), T_1] = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle$ . Damit folgt dann also  $X = X_0 \cdot \langle v_1 \rangle = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1 \rangle \leq V$  und somit  $V \leq C$ . Wir haben einen Widerspruch zu (2) erhalten und damit die Behauptung unter (4) bewiesen.

Es sei daran erinnert, daß  $Vr_0$  und  $Vr_1 r_2$  Repräsentanten der beiden Klassen von Involutionen in  $L/V$  sind. Ferner gilt  $C_V(r_0) \cdot \langle r_0 \rangle = C_U(r_0) \cdot \langle r_0 \rangle$  und  $V \cdot T \in \text{Syl}_2(L)$  mit  $VT \cap S = VT$  sowie  $C_{VT}(r_1 r_2) = C_S(r_1 r_2)$ ; da außerdem  $Vr_1 r_2 \cap \text{ccl}_J(u_1) = \text{ccl}_V(r_1 r_2)$  ist, erhalten wir analog zu (4) nun auch die folgende Behauptung:

(5) Ist  $Y = C_J(Y) \cong E(2^{10})$  und  $C \leq N_J(Y)$ , so gilt  $|YX : Y| \geq 4$  und damit  $X \cap Y \not\leq E(2^4)$ .

Da  $S \in \text{Syl}_2(J)$  ist mit  $Z(S) = \langle u_1 \rangle$  und da  $C$  eine 2-Gruppe ist mit  $Z(C) = Z(C_J(Z(C)))$ , können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $\langle u_1 \rangle \leq Z(C) = X$  gilt. Dann ist insbesondere auch  $C \leq H$ .

Wir nehmen nun an, daß  $X \cap \text{ccl}_J(w_1) = \emptyset$  ist und betrachten dann zunächst den Fall, daß  $X \leq O_2(H) = E$  ist. Da  $Z(E) \leq X \cong E(2^6)$  ist, gilt  $|C_E(X)| = 2^8$ ; insbesondere ist also  $C > X = Z(C)$  und somit  $C' \neq \langle 1 \rangle$ . Folglich gilt wegen der irreduziblen Operation von  $N$  auf  $X$  dann auch  $X \leq C'$ . Nach (3.27.b) können wir ferner o.B.d.A. annehmen, daß  $X$  eine Untergruppe  $X_0 \cong E(2^3)$  enthält, welche ein Element aus  $\{ \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \langle u_1, u_2, u_4 \rangle, \langle u_1, u_2, u_5 v_1 r_0 \rangle \}$  ist.

Gilt  $X_0 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ , so ist  $C \leq C_J(X_0) = U \cdot E_1 E_2$  und damit  $X \leq C' \leq (U E_1 E_2)' \leq U \cdot \langle r_0 \rangle$ ; dies widerspricht jedoch (4). Ist  $X_0 = \langle u_1, u_2, u_5 v_1 r_0 \rangle$ , so gilt nach (3.27) dann  $C \leq C_J(X_0) = U \cdot \langle r_0, r_1 r_2, r_3, r_1 d_1, d_2 t_1 t_2 \rangle$  und somit  $X \leq C' \leq U \cdot \langle r_0 r_1 r_2 \rangle$ ; dies widerspricht jedoch (4). Also gilt  $X_0 = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$  und  $C \leq C_J(X_0) = R \cdot K_0$ . Da nun  $S_0 := S \cap R \cdot K_0 = R \cdot \langle v_4 t_2, w_2 s, t_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $R \cdot K_0$  ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $C \leq S_0$  ist. Insbesondere ist dann  $X \leq (S_0)' = U \cdot \langle r_0, r_2, d_2 \rangle$ . Da  $q_2$  ein Element der Ordnung 7 aus  $M$  ist, welches transitiv auf  $(X_0)^\#$  und auf  $\langle r_0, r_2, d_2 \rangle^\#$  operiert und da mit  $U r_0 \cap \text{ccl}_J(u_1) = \text{ccl}_U(r_0) = [U, r_0] \cdot r_0$  dann stets  $X_0 r_0 \cap \text{ccl}_J(w_1) \neq \emptyset$  gilt, sehen wir nun leicht, daß also für  $r \in X - U$  dann stets  $X_0 \cdot r \cap \text{ccl}_J(w_1) \neq \emptyset$  folgt; das widerspricht aber der Annahme, daß  $X \cap \text{ccl}_J(w_1) = \emptyset$  ist.

Wir haben also gezeigt, daß  $X$  nicht in  $O_2(H) = E$  enthalten ist. Aus (3.11) entnehmen wir nun, daß  $X \leq H'$  ist und daß o.B.d.A.  $v = u_6 v_1 r_0 \in X$  ist. Ferner gilt dann  $C \leq C_H(v) = U \cdot \langle r_0, t_1 \rangle \times \langle r_0 r_1 d_2, r_0 d_1 t_2, a_3, s_2 \rangle$ . Wir setzen nun  $Y_0 = \langle r_0, r_1 d_2, d_1 t_2, s_2 \rangle$ ; dann ist  $U \cdot Y_0$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_H(v)$  und  $U \cdot Y_0 \cdot \langle t_1 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_H(v)$ . Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß  $C \leq U \cdot Y_0 \cdot \langle t_1 \rangle$  und  $X \leq U \cdot Y_0$  ist. Da nun  $(UY_0 \langle t_1 \rangle)'$  in  $U \cdot (Y_0 \langle t_1 \rangle)' = U \cdot (Y_0)' = U \cdot \langle r_0 r_1 d_2 \rangle$  enthalten ist, folgt aus (4) nun offensichtlich  $C' = \langle 1 \rangle$  und somit dann auch  $X = C = C_J(X) \cong E(2^6)$ .

Es gilt also  $X = C \leq U \cdot Y_0$ . Wir beachten nun, daß  $Y_0 \cong Z_2 \times D_8$  ist; also ist jede elementar-abelsche Untergruppe von  $Y_0$  dann in  $Y_1 := \langle r_0, r_0 r_1 d_2, r_0 d_1 t_2 \rangle$  oder in  $Y_2 := \langle r_0, r_0 r_1 d_2, s_2 \rangle$  enthalten. Mit den Relationen aus (3.2) - (3.4) berechnen wir nun  $C_U(Y_1) = \langle u_1, u_2, u_3, v \rangle$  und  $C_U(Y_2) = \langle u_1, u_2, u_4, v \rangle$ . Offensichtlich gibt es dann also ein  $i \in \{1, 2\}$  mit  $UX \leq U \cdot Y_i$ ; aus (4) folgt jetzt  $X_0 := X \cap U = Z(UY_i) = C_U(Y_i) \cong E(2^4)$ .

Da  $Ur_0 \cap \text{cccl}_J(u_1) = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 r_0 \rangle \cdot r_0$  ist, gilt offensichtlich  $X \cap Ur_0 = \emptyset$ .

Ist  $i = 1$ , so beachten wir, daß  $\langle d_2, t_2 \rangle$  die Gruppe  $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$  zentralisiert und daß außerdem noch  $d_2: v \rightarrow u_2 v, r_0 r_1 d_2 \rightarrow r_0 r_1 d_2, r_0 d_1 t_2 \rightarrow d_1 t_2$  sowie  $t_2: v \rightarrow u_1 u_3 v, r_0 r_1 d_2 \rightarrow r_1 d_2, r_0 d_1 t_2 \rightarrow r_0 d_1 t_2$  gilt; wir können somit o.B.d.A.  $UX = U \cdot \langle r_0 r_1 d_2, r_0 d_1 t_2 \rangle$  annehmen. Mit den Relationen (3.2) - (3.4) sehen wir nun, daß  $[U, r_0 r_1 d_2] = \langle u_1, u_2, u_4, v, w_1 u_6 v_3 d_2 \rangle \cong E(2^5)$  ist und

und daß  $C_U(r_0 r_1 d_2) = [U, r_0 r_1 d_2] \cdot \langle u_3 \rangle$  ist. Da aber nun  $U r_0 r_1 d_2 \cap ccl_J(u_1) = ccl_U(r_0 r_1 d_2) = [U, r_0 r_1 d_2] \cdot r_0 r_1 d_2$  und  $u_3 \in X_0 \leq X$  ist, folgt dann  $X \cap ccl_J(w_1) \neq \emptyset$ . Dies widerspricht jedoch der Annahme, daß  $X \cap ccl_J(w_1) = \emptyset$  ist.

Wir haben somit gezeigt, daß  $i = 2$  gilt. Insbesondere ist also  $X_0 = \langle u_1, u_2, u_4, v \rangle$ . Ferner gilt  $UX = U \cdot Y$  mit  $E(2^2) \cong Y \leq Y_2$  und  $Y \cap \langle r_0 \rangle = \langle 1 \rangle$ . Da für  $1 \neq y \in Y$  nun  $U \cdot y \cap ccl_J(u_1) = ccl_U(y) = [U, y] \cdot y$  ist, gilt offensichtlich  $X_0 \leq [U, y]$  für jede Involution  $y$  aus  $Y$ .

Mit Hilfe der Relationen in (3.2) - (3.4) berechnen wir jetzt  $[U, s_2] = \langle u_2, u_4, w_2, u_6 v_3 d_2 \rangle \cong E(2^4)$  und außerdem  $[U, r_1 d_2] = \langle u_1, u_2, u_4, u_3 u_6 v_1 r_0, v_3 d_2 \rangle \cong E(2^5)$ ; ferner gilt  $X_0 \leq [U, r_0 r_1 d_2]$  und  $X_0 \leq [U, r_0 s_2]$ . Damit folgt also  $Y = \langle r_0 r_1 d_2, r_0 s_2 \rangle$ . Wir erhalten nun einen Widerspruch, denn einerseits gilt wegen  $X = C_J(X)$  auch  $X_0 = C_U(UX) = C_U(Y)$  und andererseits berechnen wir mit den Relationen aus (3.4) außerdem  $C_U(r_0 r_1 d_2, r_0 s_2) = X_0 \cdot \langle u_3 u_6 v_3 d_2 \rangle \cong E(2^5)$ . Damit haben wir also die folgende Behauptung bewiesen:

(6) Es ist  $X \cap ccl_J(u_1) \neq \emptyset$  und  $X \cap ccl_J(w_1) \neq \emptyset$ .

Wir können im folgenden also o.B.d.A. annehmen, daß  $w_1 \in X$  und somit  $C \leq H_1$  gilt. Da  $|H_1 : (H_1)'| = 2$  und nach (4) außerdem  $|UX : U| \geq 4$  ist, gilt dann insbesondere  $UX \cap (H_1)' > U$ . Also existiert ein Element  $w \in X$  mit  $w \in (H_1)' - U$ .

Nach (3.12) gibt es in  $(H_1)' - U$  genau drei Konjugiertenklassen von Involutionsen unter  $H_1$ ; repräsentiert werden diese Klassen von  $r_0, w_1 r_0$  sowie  $w_2 r_0$ . Wir beachten nun,

daß  $\{v_1, w_1 v_1, u_5 v_1\} \leq (H_1)' - U$  ist mit  $(v_1)^S = r_0$ ,  
 $(w_1 v_1)^S = w_1 r_0$  und  $[r_1 t_1 s_2, u_5 v_1] = w_1$ ; also gilt auch  
 $u_5 v_1 \in \text{ccl}_{H_1}(w_2 r_0)$ . Wir können somit o.B.d.A. annehmen, daß  
 $w \in \{v_1, u_5 v_1\}$  ist.

Wir setzen nun  $F_0 := \langle r_0, r_1, r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$  sowie  
 $F_1 := \langle r_0, r_1, r_3 d_1, s_1 \rangle$  und  $F_2 := \langle r_0, r_1 r_2, r_1 r_3 d_1, s_1 \rangle$ ;  
ferner sei  $Y_0 := \langle r_0, r_1 \rangle \times \langle r_1 r_3 d_1, t_1 s_2, y_1, r_1 s_1 \rangle$ , wobei  
 $y_1 = r_3 a_0$  ein Element der Ordnung 3 ist. Offensichtlich  
gilt  $Y_0 \cong E(2^2) \times \text{Sym}_4$  und  $F_0 \cong F_1 \cong F_2 \cong E(2^4)$ . Mit den  
Relationen aus (3.2) - (3.4) und den Resultaten aus (3.12)  
sehen wir nun leicht, daß  $C_{H_1}(v_1) = V \cdot Y_0$  und außerdem  
 $C_{H_1}(u_5 v_1) = V \cdot F_2$  ist.

In jedem Falle gilt  $C_{H_1}(w)' \leq V \cdot \langle r \rangle$  mit einer Involu-  
tion  $r$  aus  $\langle r_1 r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$ ; mit (5) folgt nun  $X \not\leq C'$ .  
Da  $N$  irreduzibel auf  $X = Z(C)$  operiert und da  $C$  eine  
2-Gruppe ist, gilt dann also  $C' = \langle 1 \rangle$ . Damit gilt

$$(7) \quad X = C \cong E(2^6).$$

Da  $VX/V$  eine elementar-abelsche Untergruppe von  
 $C_{H_1}(w)/V$  ist, können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß es  
ein Element  $i \in \{0, 1, 2\}$  gibt mit  $VX \leq V \cdot F_i$ . Nach (5)  
gibt es dann eine Untergruppe  $D$  von  $F_i$  mit  $VX = V \cdot D$   
und  $|D| \geq 2^2$ . Mit (7) erhalten wir jetzt auch

$$(8) \quad C_V(F_i) \leq C_V(D) = C_V(X) = V \cap X \leq E(2^4).$$

Wir betrachten nun den Fall, daß  $D \leq R_1 \leq E \cong \text{Ex}(2^{13})$   
ist. Da  $V \cap E \cong E(2^7)$  ist, folgt  $|C_{(V \cap E)}(D)| \cdot |D| = 2^7$  und  
somit  $E(2^7) \leq C_V(D)X \leq C = X \cong E(2^6)$ ; dies ist absurd.



Da  $\langle F_1, F_2 \rangle \leq R_1$  ist, folgt aus dem obigen Widerspruch nun offensichtlich  $i = 0$ . Mit den Relationen aus (3.2) berechnen wir jetzt  $C_V(F_0) = \langle u_1, u_2, w_1, v_1 \rangle \cong E(2^4)$ . Damit erhalten wir dann die folgende Behauptung:

(9) Es ist  $VX = V \cdot D \leq V \cdot F_0$  mit  $E(2^2) \cong D \leq F_0$  und  $V \cap X = V \cap C = C_V(D) = C_V(F_0) = \langle u_1, u_2, w_1, v_1 \rangle$ ; ferner ist  $D$  nicht in  $F_0 \cap R_1 = \langle r_0, r_1, r_3 d_1 \rangle$  enthalten.

Wir beachten nun, daß  $y_1$  die Gruppe  $V \cdot F_0$  normalisiert, wobei  $y_1: r_0 \rightarrow r_0, r_1 \rightarrow r_1, r_1 r_3 d_1 \rightarrow t_1 s_2 \rightarrow r_1 r_3 d_1 \cdot t_1 s_2$  gilt. Wäre also  $D \cap \langle r_0, r_1 \rangle \neq \langle 1 \rangle$ , so könnten wir durch Konjugation mit einem Element aus  $\langle y_1 \rangle$  nun einen Widerspruch zur Aussage  $D \not\leq \langle r_0, r_1, r_3 d_1 \rangle$  herleiten. Also gilt dann  $D \cap \langle r_0, r_1 \rangle = \langle 1 \rangle$ .

Wir beachten jetzt, daß  $\langle t_1, d_2, r_2, r_3 \rangle \leq N_J(V \cdot F_0)$  ist mit  $t_1: r_1 r_3 d_1 \rightarrow r_3 d_1, t_1 s_2 \rightarrow t_1 s_2$ ,

$$d_2: r_1 r_3 d_1 \rightarrow r_0 r_1 r_3 d_1, t_1 s_2 \rightarrow t_1 s_2,$$

$$r_2: r_1 r_3 d_1 \rightarrow r_1 r_3 d_1, t_1 s_2 \rightarrow r_0 t_1 s_2 \text{ und}$$

$$r_3: r_1 r_3 d_1 \rightarrow r_1 r_3 d_1, t_1 s_2 \rightarrow r_1 t_1 s_2.$$

Wir können somit also o.B.d.A.  $D = \langle r_1 r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$  setzen.

Mit Hilfe der Relationen in (3.2) berechnen wir jetzt  $C_V(r_1 r_3 d_1) = (X \cap V) \cdot \langle u_5, v_2 \rangle$ ,  $C_V(t_1 s_2) = (X \cap V) \cdot \langle u_6, v_3 \rangle$  und  $[V, r_1 r_3 d_1] = \langle u_1, u_2 w_1, v_1, v_2 \rangle$ . Wir können somit o.B.d.A. annehmen, daß es ein Element  $x_1 \in \langle u_5 \rangle$  und ein Element  $x_2 \in \langle u_6, v_3 \rangle$  gibt mit  $\langle x_1 r_1 r_3 d_1, x_2 t_1 s_2 \rangle \leq X$ . Nun folgt  $[x_2, r_1 r_3 d_1] = [x_1, t_1 s_2] \in \langle [u_5, t_1 s_2] \rangle = \langle u_1 w_1 \rangle$ ; andererseits gilt  $[u_6, r_1 r_3 d_1] = u_2 w_1$  und  $[v_3, r_1 r_3 d_1] = v_1$ . Damit erhalten wir dann  $x_1 = x_2 = 1$ .

Wir haben bisher also gezeigt, daß o.B.d.A.

$X = \langle u_1, u_2, w_1, v_1, r_1 r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$  gilt. Nun ist jedoch klar, daß  $[X, \langle r_0 \rangle] = \langle 1 \rangle$  gilt; insbesondere ist dann  $E(2^7) \cong X \times \langle r_0 \rangle \leq C_J(X) = C = X \cong E(2^6)$ , welches offensichtlich absurd ist. Wir haben damit einen endgültigen Widerspruch erhalten und somit das Lemma bewiesen.

Q.E.D.,

(5.13) Lemma. Ist  $E(2^7) \cong X \leq J$ , so ist  $N_J(X)$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert.

Beweis. Es sei  $N = N_J(X)$  und  $C = C_J(X)$ . Es sei daran erinnert, daß  $E(L_7(2)) = \{2, 3, 5, 7, 31, 127\}$  ist. Aus (3.19) folgt jetzt  $\Pi(N) \leq \{2, 3, 5, 7\}$ . Nach (5.6) können wir annehmen, daß  $C \leq O_2(N)$  ist. Die Anwendung eines Satzes von Maschke sowie der Resultate in (5.7) und (5.8) zeigt nun, daß o.B.d.A.  $\Pi(N) = \{2, 3\}$  ist. Aus (5.5) und (5.9) - (5.12) schließen wir jetzt, daß o.B.d.A. die Gruppe  $N$  irreduzibel auf  $X$  operiert und daß somit auch  $C = O_2(N)$  ist. Es existiert also eine 3-Gruppe  $P$  in  $N$  derart, daß  $P \cong C \cdot P / C = O_3(N/C) \neq \langle 1 \rangle$  ist. Da  $X \cong E(2^7)$  ist, folgt aus einem Satz von Maschke, daß  $X_0 := C_X(P) \neq \langle 1 \rangle$  gilt. Mit dem Frattini-Argument folgt  $X_0 \trianglelefteq N$ ; da aber  $N$  irreduzibel auf  $X$  operiert, erhalten wir  $X_0 = X$  und damit  $P \leq C_J(X) = C = O_2(N)$ . Dies ist offensichtlich ein Widerspruch. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Q.E.D.

(5.14) Bemerkung. Die Behauptung von Theorem (5.1) folgt nun trivialerweise aus den Lemmata (5.7) sowie (5.9) - (5.13) .

Wir können noch ein nützliches Resultat aus (5.3) herleiten:

Es sei  $X$  eine Untergruppe der Sylow 2-Untergruppe  $S$  von  $J$  mit  $X \cong R \cong \text{Spec}(2^{15})$  . Dann wird  $X$  also von zwei elementar-abelschen Gruppen der Ordnung  $2^9$  erzeugt; ferner enthält  $X$  keine Untergruppen isomorph zu  $E(2^{10})$  . Nach (5.3) gilt dann  $X \leq Y$  mit  $Y := \langle U, V, W, R \rangle = U \cdot R_2 \cdot \langle t_2 \rangle$  . Da sowohl  $S/U$  als auch  $Y/U$  den 2-Rang sechs hat, gilt offensichtlich  $X_0 := X \cap U \cong E(2^9)$  . Aus (3.8.a) wissen wir, daß  $C_J(X_0) = U$  ist; insbesondere gilt dann  $Z(X) \leq X_0$  und somit  $X/X_0 \cong E(2^6)$  . Nun ist klar, daß  $UX = U \cdot R_2$  ist. Es folgt ferner  $Z(X) = C_U(R_2) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle = Z(R)$  sowie  $X_0 = \{ x \in U \mid [x, R_2] \leq Z(R) \} = U_0 \langle v_1 r_0, v_2 r_2, v_3 d_2 \rangle = U_1$  . Wir beachten, daß  $N := N_M(R_2 \bmod U)/U \cong E(2^6) \cdot (L_3(2) \times \text{Sym}_3)$  ist mit  $(N \# UR_2/U) = 21 r_0 U + 42 r_1 r_2 U$  . Da sowohl  $C_U(r_0)$  als auch  $C_U(r_1 r_2)$  in  $U_1$  enthalten ist und da außerdem  $U_1 = [U, R_2] = (UR_2)' \triangleleft N$  ist, folgt jetzt offensichtlich  $X = U_1 \cdot R_2 = R$  . Also gilt folgendes

(5.15) Korollar. Ist  $X$  eine zu  $R$  isomorphe Untergruppe der Sylow 2-Untergruppe  $S$  von  $J$  , so gilt  $X = R$  . Insbesondere ist  $R$  eine charakteristische Untergruppe einer jeden 2-Untergruppe  $Y$  von  $J$  mit  $R \leq Y$  .

§6 EINFACHE UNTERGRUPPEN VON J

Zur Bestimmung der maximalen Untergruppen von J benötigen wir u. a. auch das folgende Resultat:

(6.1) Theorem. Jede einfache Untergruppe von J ist in  $\mathcal{K}$  enthalten.

Dieses Resultat folgt trivialerweise aus der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. Wir wollen in diesem Paragraphen jedoch aufzeigen, wie man dieses Resultat auch ohne Benutzung der Klassifikation herleiten kann. Zu diesem Zwecke treffen wir die folgende für diesen Abschnitt gültige Vereinbarung:

Mit  $G$  sei eine nichtabelsche einfache Untergruppe von J bezeichnet, welche nicht in  $\mathcal{K}$  enthalten ist; außerdem sei  $G$  bezüglich dieser Eigenschaft minimal, d.h. jede echte einfache Sektion von  $G$  sei in  $\mathcal{K}$  enthalten.

(6.2) Lemma. (a) Es ist  $2^{11} \cdot 3^2$  ein Teiler von  $|G|$ ; ferner hat eine Sylow 2-Untergruppe von  $G$  höchstens die Ordnung  $2^{20}$ .

(b) Es sei  $X$  eine maximale Untergruppe von  $G$ ; dann gilt  $|G : X| \geq 50$ . Ist  $|G : X| = k \cdot p$  mit  $1 \leq k \leq 3$  und  $p \in \{11, 23, 29, 31, 37, 43\}$ , so gilt  $k = 3$  und  $p = 37$ .

(c) Eine minimale nichtabelsche einfache Sektion von  $G$  ist isomorph zu  $\text{Alt}_5$ ,  $L_3(2)$  oder  $L_2(23)$ .

(d) Ist  $X$  eine 2-lokale Untergruppe von  $G$ , so ist  $X$  2-constrained und  $O(X) = \langle 1 \rangle$ , d.h.  $G$  ist vom Charakteristik 2-Typ; außerdem gilt  $|O_2(X)| \geq 2^5$ . Ferner gibt es in  $G$  eine 2-lokale Untergruppe, welche eine zu  $E(3^2)$  isomorphe Gruppe enthält.

(e) Der 2-Rang von  $G$  ist mindestens drei; insbesondere ist in  $G$  also  $SCN_3(2) \neq \emptyset$ . Der sektionale 2-Rang von  $G$  ist mindestens fünf.

(f) Ist  $j$  eine Involution aus  $G$ , so ist  $O_2(C_G(j))$  nicht von symplektischem Typ und damit insbesondere nicht extraspeziell.

(g) Es ist  $G \cap \text{ccl}_J(u_1) \neq \emptyset$ . Ist  $G \cap \text{ccl}_J(w_1) = \emptyset$ , so gilt  $|G|_2 \leq 2^{12}$ .

(h) Ist  $\langle 1 \rangle \neq P \in \text{Syl}_p(G)$  mit  $p \in \{23, 29, 31, 37, 43\}$ , so ist  $N_G(P)/P$  nicht isomorph zu  $Z_2$ .

(i) Ist  $2 \neq p \in \Pi(J)$  und  $\Pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, p\}$  und gilt für  $1 \neq x \in P \in \text{Syl}_p(G)$  stets  $C_G(x) = P$ , so ist  $N_G(P)/P$  nicht isomorph zu  $Z_2$ .

Beweis. Die Behauptung in (a) folgt aus (1.9) sowie (1.12), (5.1) und (2.5).

Wir nehmen nun an, daß  $X$  eine maximale Untergruppe von  $G$  ist und setzen  $n = |G : X|$ . Da H. Mizutani [43] alle primitiven Permutationsgruppen bestimmt hat, deren Grad kleiner als 49 ist, erhalten wir offensichtlich  $n \geq 50$ . Ist dann  $n = k \cdot p$  mit  $1 \leq k \leq 3$  und  $11 \leq p \in \Pi(J)$ , so können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $n \geq 50$  und damit  $2 \leq k \leq 3$  ist.

Wir nehmen ferner an, daß  $n \neq 3 \cdot 37$  ist. Nach (1.21) ist  $G$  dann eine 2-fach transitive Gruppe auf  $\text{ccol}_G(X)$ ; insbesondere ist  $n - 1$  ein Teiler von  $|J|$ . Damit folgt dann  $k = 3$  und  $p \geq 29$ . Mit (4.1), (4.4) und (1.20) sehen wir nun leicht, daß  $X$  eine lokale Untergruppe von  $G$  ist und somit schließlich  $G \in \mathcal{K}$  gilt. Damit folgt die Behauptung in (b).

Mit (4.1) und (4.3) erhalten wir die Aussagen in dem Teil (c). Die Behauptungen in (d) folgen unmittelbar aus (4.6), (1.15) sowie (1.12) und (5.1). Um die Aussagen in (e) zu verifizieren, konsultiere man (1.10) sowie Prop. (1.35) und Theorem (1.36) in [25].

Die Behauptungen unter (f) - (h) erhalten wir mit (1.13) und (3.31) sowie (1.19) und (3.19). Einer Arbeit [1] von L. Alex entnehmen wir schließlich das Resultat in (i).

Q.E.D.

Bevor wir weitere Untersuchungen über die Gruppe  $G$  vornehmen, wollen wir noch einige 2-lokale Informationen allgemeinerer Natur aus  $J$  zusammenstellen, welche sich bei späteren Betrachtungen als nützlich erweisen werden.

(6.3) Lemma. Es sei daran erinnert, daß  $H = E * H_0$  ist mit  $H_0 = N_J(\langle a_1 \rangle) \cong \widehat{\text{Aut}}(M_{22})$  und  $E(2^6) \cong R_1 \leq E$ . Dann gilt folgendes:

(a) Es ist  $N_H(R_1) = C_E(R_1) * N_{H_0}(R_1)$ , wobei  $C_E(R_1) = \langle u_1 \rangle \times R_1 \cong E(2^7)$  und  $N_{H_0}(R_1) \cong (\widehat{L}_3(4)) \cdot Z_2$  ist.

(b) Jede zu  $\widehat{L}_3(4)$  isomorphe Untergruppe von  $H$  ist in  $H$  zu  $N_{H_0}(R_1)'$  konjugiert. In  $H$  gibt es genau die folgenden nichttrivialen 2-Untergruppen, welche von  $N_{H_0}(R_1)'$  normalisiert werden:  $Z(E)$ ,  $R_1$ ,  $Z(E) \times R_1$  und  $E$ .

Beweis. Mit Hilfe der Relationen aus (3.2) berechnen wir leicht, daß  $N_E(R_1) = C_E(R_1) = Z(E) \times R_1 \cong E(2^7)$  ist. Ferner wissen wir aus der 2-lokalen Struktur von  $L_0$ , daß  $N_{H_0}(R_1) \geq \langle u_1 \rangle \times \langle a_1, t_1 \rangle \times L_1 \cong Z_2 \times \text{Sym}_3 \times L_3(2)$  ist.

Wir beachten nun, daß  $sq_1 \in H_0$  ist und setzen dann  $F := (R_1)^{sq_1}$ . Mit den Relationen aus (3.2) - (3.4) berechnen

wir nun  $sq_1: r_0 \rightarrow u_2$ ,  $r_1 \rightarrow u_1 u_5 v_1 r_0$ ,  $d_1 \rightarrow u_2 u_3 v_1 v_2 r_1$ ,

$r_2 \rightarrow u_4$ ,  $r_3 \rightarrow u_2 u_3 u_5 v_2 r_2$ ,  $s_1 \rightarrow u_1 u_5 v_1 r_3$ .

Also ist  $F = \langle u_2, u_4, u_1 u_5 v_1 r_0, u_3 u_5 v_2 r_2, r_0 r_1 r_2, r_0 r_3 \rangle$ .

Ferner beachten wir, daß  $S_0 = \langle u_1, u_6, v_3, v_4, d_2, s_2, t_2, s \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $H_0$  ist. Mit Hilfe der bereits erwähnten Relationen bestimmen wir nun  $N_{S_0}(F)$ .

Es ist  $C_F(d_2) = C_F(s_2) = \langle u_2, u_4, r_0 r_1 r_2, r_0 r_3 \rangle$  und  
 $C_F(u_6) = C_F(v_3 d_2) = C_F(v_4 t_2) = C_F(s) = \langle u_2, u_4, u_1 u_5 v_1 r_0, u_3 u_5 v_2 r_2 \rangle$ .  
 Ferner gilt  $[u_6, r_0 r_1 r_2] = u_2$ ,  $[u_6, r_0 r_3] = u_4$ ,  $[v_3 d_2, r_0 r_1 r_2] =$   
 $u_2 u_1$ ,  $[v_3 d_2, r_0 r_3] = u_2$ ,  $[v_4 t_2, r_0 r_1 r_2] = u_1 u_4 u_5 v_1 r_0$ ,  
 $[v_4 t_2, r_0 r_3] = w_1 u_5 v_2 r_2$ ,  $[s, r_0 r_1 r_2] = w_1 v_1 v_2 r_0 r_2$ ,  $[s, r_0 r_3] =$   
 $u_1 u_2 u_5 v_1 r_0$ ,  $[d_2, u_1 u_5 v_1 r_0] = u_2$ ,  $[d_2, u_3 u_5 v_2 r_2] = u_4$  und  
 $[s_2, u_1 u_5 v_1 r_0] = u_4$  sowie  $[s_2, u_3 u_5 v_2 r_2] = u_2 u_4$ . Außerdem  
 gilt  $[t_2, r_0 r_3] = r_2 \notin F$ . Wir haben damit gezeigt, daß  
 $N_{S_0}(F) = \langle u_1, u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, s, d_2, s_2 \rangle$  ist.

Wir setzen nun  $N = N_{(H_0)}(F)$ . Dann enthält  $N/\langle u_1, a_1 \rangle$   
 eine Untergruppe isomorph zu  $L_3(2)$  und eine Untergruppe der  
 Ordnung  $2^6$ , welche von zwei  $E(2^4)$ -Untergruppen erzeugt wird.  
 Da offensichtlich  $N \neq (H_0)'$  ist, liefert eine Inspektion  
 der Untergruppenstruktur von  $M_{22}$  nun  $N/\langle u_1, a_1 \rangle \cong L_3(4)$ .  
 Wegen  $[s_2, s] = u_1 u_6$  und  $[d_2, v_4 t_2] = u_6$  erhalten wir  
 schließlich  $N \cong \hat{L}_3(4)$ .

Da  $C_F(t_1 t_2) = \langle u_2, u_1 u_4 u_5 v_1 r_0, r_0 r_1 r_2 \rangle = [F, t_1 t_2]$  ist  
 und  $t_1 t_2: u_4 \rightarrow u_2 u_4$ ,  $u_3 u_5 v_2 r_2 \rightarrow u_2 w_1 v_1 v_2 r_0 r_2$ ,  $r_0 r_3 \rightarrow r_1 r_2 r_3$   
 gilt, folgt jetzt  $N_{H_0}(F) = N_{H_0}(N) = N \cdot \langle t_1 t_2 \rangle \cong \hat{L}_3(4) \cdot Z_2$   
 und damit die Behauptung in (a).

Da es in  $M_{22}$  genau eine Konjugiertenklasse von zu  
 $L_3(4)$  isomorphen Untergruppen gibt, ist nun auch klar, daß  
 es in  $H$  nur eine Konjugiertenklasse von Untergruppen gibt,  
 welche zu  $\hat{L}_3(4)$  isomorph sind.

Offensichtlich sind  $N$ -invariante 2-Untergruppen von  $H$   
 in  $E$  enthalten. Es sei nun  $Z(E) < X < E$  mit  $[X, N] \leq X$ .  
 Da  $N_2 := N_{S_0}(F) \in \text{Syl}_2(N)$  ist mit  $C_E(N_2) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$  und



$C_E(N_2 \text{ mod } \langle u_1 \rangle) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$ , folgt aus der irreduziblen Operation von  $N$  auf  $F$  und auf  $E/(\langle u_1 \rangle \times F)$  jetzt also  $X = \langle u_1 \rangle \times F$  und damit schließlich auch die Behauptung in Teil (b) .

Q.E.D.

(6.4) Lemma. Es sei  $X$  eine nichttriviale 2-Untergruppe von  $M$  derart, daß  $N := N_J(X)$  eine Sektion involviert, welche zu  $L_3(4)$  isomorph ist. Dann ist  $X$  in  $U = O_2(M)$  enthalten und es liegt einer der folgenden drei Fälle vor:

- (1) Es ist  $X = U$  und  $N = M$  .
- (2)  $X$  ist in  $M$  zu  $\langle w_1, w_2 \rangle$  konjugiert und es gilt  $C_J(X) = C_M(X) \cong E(2^{11}) \cdot L_3(4)$  sowie  $N \cong E(2^{11}) \cdot L_3(4) \cdot \text{Sym}_3$  .
- (3)  $X$  ist in  $M$  zu  $\langle w_1 \rangle$  konjugiert und es gilt  $N = C_J(X) = C_M(X) \cong E(2^{11}) \cdot \text{Aut}(M_{22})$  .

Beweis. Bekanntlich gibt es in  $M/U \cong M_{24}$  genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu  $L_3(4)$  ; außerdem sind deren Normalisatoren in  $M_{24}$  isomorph zu  $L_3(4) \cdot \text{Sym}_3$  . Da es in  $M_{24}$  keine nichttrivialen 2-Untergruppen gibt derart, daß deren Normalisator eine Sektion isomorph zu  $L_3(4)$  involviert, folgt die Behauptung des Lemmas nun trivialerweise aus (3.25) .

Q.E.D.

(6.5) Lemma. Es sei  $Z_{11} \cong Y \leq J$  und  $X \neq \langle 1 \rangle$  eine  $Y$ -invariante 2-Untergruppe von  $J$ . Nach (5.1) können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $X \cdot Y \leq H$  oder  $X \cdot Y \leq M$  gilt. Ferner liegt dann einer der folgenden Fälle vor:

(1) Es ist  $Z(E) \leq X \leq F_0 := C_E(Y) \cong Q_8$  oder aber es ist  $\text{Ex}(2^{11}) \cong F_1 := [E, Y] \leq X \leq F_0 * F_1 = E$ ; dabei gilt stets  $E \leq N_H(X) = N_J(X)$ . Ist  $X \cap F_0 \cong Z_4$ , so gilt dann  $N_J(X)/E \cong \text{PGL}_2(11)$ . Außerdem ist  $N_J(F_0) = N_J(F_1)$  mit  $N_J(F_0)/E \cong [Z_3 \times L_2(11)] \cdot Z_2$ .

(2) Es ist  $X \in \{F_0, F_1, U\}$ , wobei  $F_0 := C_U(Y) \cong Z_2$  und  $F_1 := [U, Y] \cong E(2^{10})$  ist. Ferner gilt  $C_J(F_1) = U$  und  $N_J(F_1) = N_M(F_1) \cong E(2^{11}) \cdot \text{Aut}(M_{12})$ .

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $X \cdot Y \leq H$  ist. Aus  $[J]$  wissen wir, daß  $F_0 := C_E(Y) \cong Q_8$  sowie  $F_1 := [E, Y] = \text{Ex}(2^{11})$  und  $E = F_0 * F_1$  ist. Insbesondere ist dann  $C_E(F_0) = F_1$  und  $C_E(F_1) = F_0$ . Da Elemente der Ordnung drei aus  $O_{2,3}(H)$  fixpunktfrei auf  $E - Z(E)$  operieren und da es in  $H/E$  keine nichttrivialen  $Y$ -invarianten 2-Untergruppen gibt, folgt nun die Aussage im Falle (1) aus (3.13).

Wir nehmen nun an, daß  $X \cdot Y \leq M$  ist. Da es in  $M/U$  keine nichttrivialen  $Y$ -invarianten 2-Untergruppen gibt, ist dann also  $X \leq U$ . Offensichtlich gilt  $F_0 := C_U(Y) \cong Z_2$  und  $F_1 := [U, Y] \cong E(2^{10})$  sowie  $U = F_0 \times F_1$ . Damit folgt dann  $X \in \{F_0, F_1, U\}$ . Da  $C_J(F_1)$  offensichtlich eine 2-Gruppe ist, folgt aus (3.8) nun  $C_J(F_1) = U$ .

Wir wollen jetzt noch die Struktur von  $N := N_J(F_1)$  bestimmen und setzen dazu  $\bar{M} := M/U$ . Da  $M$  irreduzibel auf  $U$  operiert, gilt dann  $Z_{11} \cdot Z_{10} \approx N_{\bar{M}}(\bar{Y}) \leq \bar{N} < \bar{M}$ . Offensichtlich sind die Involutionen aus  $N_{\bar{M}}(\bar{Y})$  nicht-2-zentral in  $\bar{M}$ . Wir können somit o.B.d.A. annehmen, daß  $N_{\bar{M}}(\bar{Y}) = \bar{Y} \cdot (\bar{F} \times \langle \bar{r}_1 \bar{r}_2 \rangle)$  ist mit  $Z_5 \approx F \leq M$ . Wir beachten ferner, daß  $\bar{C} := C_{\bar{M}}(\bar{r}_1 \bar{r}_2) = \bar{R}_1 \cdot \bar{D} \approx E(2^6) \cdot \text{Sym}_5$  ist mit  $\bar{C} \leq \bar{C}_0 := N_{\bar{M}}(\bar{R}_1) \approx E(2^6) \cdot 3\text{Sym}_6$  und  $O_{2,3}(\bar{C}_0) = \bar{R}_1 \cdot \langle \bar{a}_1 \rangle$ . Da  $C_{\bar{M}}(\bar{F}) \approx Z_5 \times \text{Alt}_4$  ist, können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $C_{\bar{M}}(\bar{F}) = \bar{F} \times \langle \bar{r}_1 \bar{r}_2, \bar{r}_0 \bar{r}_1 \bar{r}_3, \bar{a}_1 \rangle$  ist.

Mit Hilfe der Relationen aus (3.4) sehen wir nun leicht, daß  $[U, r_1 r_2] = [U, r_0 r_1 r_3] = [U, r_0 r_2 r_3] \approx E(2^5)$  ist. Da  $\bar{r}_1 \bar{r}_2$  invertierend auf  $\bar{Y}$  operiert, ist dann offensichtlich  $C_{F_1}(r_1 r_2) = [F_1, r_1 r_2] = [U, r_1 r_2] \approx E(2^5)$ . Damit folgt nun  $[F_1, x] \leq [U, x] = [U, r_1 r_2] \leq F_1$  für  $1 \neq x \in \langle r_1 r_2, r_0 r_1 r_3 \rangle$ . Also ist  $Z_5 \times E(2^2) \approx \bar{F} \times \langle \bar{r}_1 \bar{r}_2, \bar{r}_0 \bar{r}_1 \bar{r}_3 \rangle \leq \bar{N}$ .

Eine Inspektion der Struktur der maximalen Untergruppen von  $M_{24}$  liefert nun  $\bar{N} \approx \text{Aut}(M_{12})$  und somit auch die Behauptung im Falle (2).

Q.E.D.

(6.6) Lemma. Wir wissen schon, daß  $E_1 A_1$  und  $E_2 A_2$  Repräsentanten der beiden konjugierten Klassen von maximalen Untergruppen in  $L_0$  sind, welche eine Sektion isomorph zu  $\text{Alt}_6$  involvieren.

Wir setzen  $y_1 = a_2 r_3 (a_0)^2$  und  $y_2 = (q_0)^3 (a_2)^2 (q_0)^6 d_2 s_2 s_1$ ; ferner sei  $X_1 := \langle r_2 r_3 d_2, r_2 s_2, s_1 t_2, y_1, y_2 \rangle$  sowie  $X_2 := \langle r_0 r_2 r_3 d_2, r_0 r_1 r_2 s_2, s_1 t_2, y_1, y_2 \rangle$  und  $X := E_1 A_1$ . Dann gilt folgendes:

(a) Es ist  $\sigma(y_i) = 3$  und  $\langle y_i, s_1 t_2 \rangle \cong \text{Sym}_3$  für  $i \in \{1, 2\}$ . Außerdem gilt

$$y_1: r_0 \rightarrow r_0 r_1 \rightarrow r_1, d_1 \rightarrow d_1 t_1 \rightarrow t_1, r_2 \rightarrow r_2 r_3 d_2 s_2 \rightarrow s_2, \\ r_3 \rightarrow r_2 d_2 \rightarrow d_2 s_2, y_2 \rightarrow y_2 \quad \text{und}$$

$$y_2: r_0 \rightarrow r_0 t_1 \rightarrow r_0 d_1 t_1, r_1 \rightarrow r_1 d_1 t_1 \rightarrow r_1 d_1, d_1 \rightarrow d_1 t_1 \rightarrow t_1.$$

(b) Es ist  $X_1 \cong X_2 \cong \text{Alt}_6$  mit  $E_1 X_1 = E_1 X_2 \leq X$  sowie  $N_{L_0}(X_1) = N_X(X_1) = X_1 \cdot \langle r_2 \rangle \cong \text{Sym}_6$  und  $N_{L_0}(X_2) = N_X(X_2) = X_2 \cdot \langle r_0 r_2 \rangle \cong \text{Sym}_6$ .

Sowohl in  $X$  als auch in  $E_1 X_1$  sind  $X_1$  und  $X_2$  Repräsentanten der beiden konjugierten Klassen von Untergruppen isomorph zu  $\text{Alt}_6$ .

(c) Sowohl  $X_1$  als auch  $X_2$  operiert irreduzibel auf  $W_0 := C_V(E_1) = Z(VE_1) = (VE_1)' = [V, E_1] = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 \rangle$ .

Es gibt eine  $X_1$ -invariante Untergruppe  $\tilde{V} \cong E(2^6)$  von  $V$  derart, daß  $V = W_0 \times \tilde{V}$  gilt. Außerdem ist dann  $\tilde{V}_1 := C_{\tilde{V}}(X_1) = C_V(X_1) = C_V(X_1 \langle r_2 \rangle) = \langle u_4, u_5, v_2 \rangle \cong Z_2$  und  $\tilde{V}_2 := [\tilde{V}, X_1] \cong E(2^5)$  mit  $\tilde{V}_1 \leq \tilde{V}_2$ ; insbesondere ist dann  $\langle 1 \rangle < \tilde{V}_1 < \tilde{V}_2 < \tilde{V}$  die einzige Kompositionsreihe von  $\tilde{V}$  als  $X_1$ -Modul.

Als  $X_2$ -Modul ist  $V$  uniserial, d.h. es gibt genau eine Kompositionsreihe von  $V$  als  $X_2$ -Modul; diese ist  $\langle 1 \rangle < W_0 < W_1 < W_2 < V$ , wobei  $W_1 := W_0 \cdot \tilde{V}_1$  und  $W_2 := W_0 \cdot \tilde{V}_2$  ist mit  $W_2 = [V, X_1] = [V, E_1 N_X(X_1)]$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

Ferner ist  $W_2 = W_0 \cdot \langle u_4 u_6 v_2, u_4, u_5, v_3, u_6 v_4 \rangle$  und  $W_1 \cap \text{cccl}_J(u_1) = W_0^*$ .

Beweis. Die Aussagen in Teil (a) verifizieren wir durch einfache Matrizenrechnungen in der Gruppe  $L_0$ .

Wir beachten, daß  $L_0$  das folgende Element enthält:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ ferner gilt } \begin{pmatrix} 1 & a & b & c & d \\ u & & & & \\ v & & x & & \\ w & & & & \\ x & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & u \\ & & & & v \\ & x & & & w \\ & & & & x \\ a & b & c & d & 1 \end{pmatrix} g$$

für die entsprechenden  $5 \times 5$ -Matrizen aus  $L_0$ . Insbesondere ist also  $(A_2)^g = A_1$ . Wir wissen, daß  $\text{Sym}_6 = B \leq A_2$  ist; nun verifizieren wir leicht, daß  $(B')^g = X_1$  und außerdem  $B^g = X_1 \cdot \langle r_2 \rangle$  gilt. Da es in  $\text{Alt}_8$  nur eine Konjugiertenklasse von zu  $\text{Alt}_6$  isomorphen Untergruppen gibt, finden wir also in  $E_1 \cdot X_1$  Repräsentanten aller  $X$ -Klassen von zu  $\text{Alt}_6$  isomorphen Untergruppen in  $X$ . Aus (1.2.b) folgt nun, daß es in  $E_1 \cdot X_1$  genau zwei Konjugiertenklassen von Untergruppen gibt, welche zu  $\text{Alt}_6$  isomorph sind; jetzt rechnen wir leicht nach, daß  $X_1$  und  $X_2$  Repräsentanten dieser beiden Klassen sind und daß sie auch in  $X$  nicht konjugiert sind. Ebenso einfache Rechnungen liefern  $X_2 \cdot \langle r_0 r_2 \rangle \approx \text{Sym}_6$ . Alle weiteren Aussagen in Teil (b) folgen nun aus wohlbekannten Eigenschaften der Gruppen  $\text{GL}_5(2)$  und  $\text{Alt}_8$ .

Wir wollen nun die Struktur von  $V$  als  $X_1$ -Modul untersuchen. Aus den Relationen (3.2) wissen wir bereits, daß  $W_0 := C_V(E_1) = Z(VE_1) = (VE_1)' = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 \rangle \cong E(2^4)$  ist. Offensichtlich operieren dann  $X_1$  und  $X_2$  irreduzibel auf  $W_0$ .

Nach (3.23) operiert  $A_2$  irreduzibel auf  $U_0 = C_V(E_2)$ ; folglich operiert  $A_1 = (A_2)^g$  dann auch irreduzibel auf  $\tilde{V} := (U_0)^g \cong E(2^6)$ . Somit gilt  $V = W_0 \times \tilde{V}$ , wobei  $\tilde{V}$  wegen  $X_1 \leq A_1$  auch  $X_1$ -invariant ist.

Wir bestimmen nun die Kompositionsstruktur des  $X_1$ -Moduls  $\tilde{V}$ ; dazu genügt es offensichtlich, die Struktur von  $U_0$  als  $B'$ -Modul zu untersuchen. Da  $\{f_0, r_1 r_3 d_1\} \leq B' \leq C_L(w_1)$  ist mit  $C_V(f_0) = \langle w_1, w_2 \rangle$  und  $[w_2, r_1 r_3 d_1] = u_2 w_1$ , folgt dann  $C_V(B') = C_V(B) = C_{U_0}(B') = C_{U_0}(B) = \langle w_1 \rangle \cong Z_2$ . Aus (3.2) erhalten wir ferner  $[U_0, f_0] = \langle u_2, u_1 w_1, u_4 u_5, u_3 u_6 \rangle$  und  $[U_0, r_1 r_3 d_1] = \langle u_1, u_2 w_1 \rangle$ . Damit ist nun klar, daß  $U_0$  ein uniserieller  $B'$ -Modul bzw.  $B$ -Modul ist, wobei  $C_{U_0}(B) = \langle w_1 \rangle$  und  $[U_0, B'] = [U_0, B] = \langle u_1, u_2, w_1, u_4 u_5, u_3 u_6 \rangle \cong E(2^5)$  die einzigen nichttrivialen  $B'$ -Untermoduln von  $U_0$  sind.

Wir nehmen nun an, daß  $Y \neq \langle 1 \rangle$  eine  $X_2$ -invariante Untergruppe von  $V$  ist mit  $Y \cap W_0 = \langle 1 \rangle$ . Da  $W_0 = C_V(E_1)$  und  $E_1 X_1 = E_1 X_2$  ist, sind die  $X_2$ -Untermoduln von  $V/W_0$  genau die  $X_1$ -Untermoduln von  $V/W_0$ ; somit ist  $C_Y(X_2) \cong Z_2$ . Da einerseits  $X_1 \cap X_2 \cong \langle y_1, y_2 \rangle =: P \cong E(3^2)$  ist mit  $C_V(P) \cong E(2^2)$  und  $|C_V(P) \cap \text{ccl}_J(w_1)| = 1$  und andererseits  $C_V(f) \cap \text{ccl}_J(u_1) = \emptyset$  ist für Elemente  $f$  der Ordnung fünf aus  $L$ , folgt jetzt  $C_Y(X_2) = C_V(X_2) = C_V(X_1)$  und damit der Widerspruch  $\langle 1 \rangle \neq C_V(X_1, X_2) = C_V(E_1 X_1) = W_0 \cap \langle w_1 \rangle$ .

Wir haben also gezeigt, daß  $C_V(X_2) = \langle 1 \rangle$  und daß  $W_0 \leq Y$  ist. Damit folgen nun die Aussagen über die Kompositionsstruktur von  $V$  als  $X_2$ -Modul.

Wir wollen jetzt Erzeugende von  $\tilde{V}_1$  und  $W_2$  bestimmen. Da  $Q := \langle r_2 r_3 d_2, r_2 s_2, s_1 t_2 \rangle \in \text{Syl}_2(X_1)$  ist und da ferner  $C_V(Q) = \langle u_1, u_4, u_6 v_2 \rangle$  sowie  $\langle u_1, u_4 \rangle^* \subseteq \text{ccl}_J(u_1)$  ist, gilt dann  $\tilde{V}_1 = \langle v \rangle$  mit  $v \in u_6 v_2 \langle u_1, u_4 \rangle$ . Wir beachten nun, daß  $y_1: u_1 \rightarrow u_1 u_2$ ,  $u_4 \rightarrow u_4$ ,  $u_6 v_2 \rightarrow u_6 v_2$  und außerdem  $y_2: u_4 \rightarrow u_5 u_6 v_3 v_4$ ,  $u_6 v_2 \rightarrow u_4 u_5 v_2 v_3 v_4$  gilt. Nun folgt offensichtlich  $\tilde{V}_1 = \langle u_4 u_6 v_2 \rangle$ .

Es ist weiterhin klar, daß  $W_2 := [V, X_1] = [V, E_1 X_1] = [V, E_1 N_X(X_1)] \cong E(2^9)$  ist mit  $W_1 := W_0 \tilde{V}_1 \leq W_2$ . Wir wissen schon, daß  $[y_2, u_4] = u_4 u_5 u_6 v_3 v_4$  ist; außerdem erhalten wir mit (3.2) noch  $[r_2 r_3 d_2, v_2] = u_4$ ,  $[r_2 r_3 d_2, v_4] = u_5 u_6 v_2$ ,  $[r_2 s_2, v_4] = u_5 v_3$  und  $[s_1 t_2, u_6] = u_4 u_5$ . Damit folgt nun  $W_2 = W_0 \cdot \langle u_4 u_6 v_2, u_4, u_5, v_3, u_6 v_4 \rangle$ .

Abschließend stellen wir noch fest, daß für  $v = u_4 u_6 v_2$  folgende Relationen gelten:  $[v, r_0] = u_1$ ,  $[v, r_1] = u_2$ ,  $[v, d_1] = u_3$  und  $[v, t_1] = u_2 v_1$ . Damit gilt dann offensichtlich  $W_1 - W_0 = \text{ccl}_{E_1}(v) \subseteq \text{ccl}_J(W_1)$ . Aus (3.6) wissen wir ferner, daß  $W_0^*$  in  $\text{ccl}_J(u_1)$  enthalten ist. Damit haben wir auch sämtliche Behauptungen in Teil (c) bewiesen.

Q.E.D.

(6.7) Lemma. Es sei daran erinnert, daß  $M$  die Gruppe  $X := E_2 A_2 \approx E(2^4) \cdot \text{Alt}_8$  enthält und daß außerdem auch  $\text{Sym}_6 \approx B = \langle r_1, r_3 d_1, s_1, t_1 s_2, a_1 a_3, j_2 t_1, f_0 \rangle \approx B' \cdot \langle r_1 \rangle \leq A_2$  sowie  $B' = \langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2, a_1 a_3, j_2 t_1, f_0 \rangle \approx \text{Alt}_6$  gilt. Ferner enthält  $B'$  das Element  $y := (a_1 a_3)^2 j_2 t_1 a_1 a_3 r_3 d_1 s_1 j_2 t_1$  und es ist  $P := \langle a_1 a_3, y \rangle \approx E(3^2)$  mit  $N_{B'}(P) \approx E(3^2) \cdot Z_4$  sowie  $N_X(P) = N_B(P) = P \cdot \langle r_1 r_3 d_1 j_2 t_1, r_1 j_2 t_1 \rangle \approx E(3^2) \cdot D_8$ .

Wir setzen nun  $\bar{M} := M/U$  sowie  $X_1 := B'$  und  $X_2 := \langle r_0 r_1 r_3 d_1, r_0 r_2 r_1 s_1, t_1 s_2, a_1 a_3, y \rangle$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Für  $i \in \{1, 2\}$  ist  $X_i \approx \text{Alt}_6$ ; außerdem gilt  $N_X(X_i) = X_i \cdot \langle r_3 d_1 \rangle \approx \text{Sym}_6$ .

Die Gruppen  $\bar{X}_1$  und  $\bar{X}_2$  sind Repräsentanten der zwei verschiedenen Konjugiertenklassen von zu  $\text{Alt}_6$  isomorphen Untergruppen in  $\bar{M}$ . Es ist  $N_{\bar{M}}(\bar{X}_1) = N_{\bar{X}}(\bar{X}_1) = \bar{B} \approx \text{Sym}_6$  und  $N_{\bar{M}}(\bar{X}_2) = N_{\bar{X}}(\bar{X}_2) \cdot \langle \bar{r} \rangle = \bar{X}_2 \langle \bar{r}_0 \bar{r}_1, \bar{r} \rangle \approx \text{Aut}(\text{Alt}_6)$ , wobei  $r$  eine Involution aus  $M - U$  ist mit  $\bar{X}_2 \cdot \langle \bar{r} \rangle \approx \text{PGL}_2(9)$  und  $\bar{X}_2 \langle \bar{r}_0 \bar{r}_1 \bar{r} \rangle \approx M_{10}$ . Ferner ist  $C_U(X_1) = \langle w_1, s \rangle \approx E(2^2)$  und  $C_U(X_2) = \langle w_1 \rangle \approx Z_2$ .

(b) Ist  $i \in \{1, 2\}$ , so normalisiert  $X_i$  die Gruppe  $U_0$ . Ferner sind  $W_0 := \langle w_1 \rangle = C_{U_0}(X_i)$  und  $W_1 := [U_0, X_i] = \langle w_1, u_1, u_2, u_4 u_5, u_4 u_6 \rangle$  die einzigen nichttrivialen  $X_i$ -invarianten Untergruppen von  $U_0$ .

(c) Die Gruppe  $U^* = U_0 \cdot \langle v_1 r_0, v_2 r_2, v_3 d_2, v_4 t_2 \rangle$  ist als  $X_1$ -Modul uniserial; dabei sind  $W_0$ ,  $W_1$  und  $U_0$  die einzigen nichttrivialen  $X_1$ -Untermoduln von  $U^*$ .

Ist  $Y$  ein  $X_1$ -Untermodul von  $U$ , welcher nicht in  $U^*$



enthalten ist, so ist  $Y$  ein Element aus der Menge  $\{ \langle s \rangle, \langle w_1 s \rangle, W_0 \langle s \rangle, W_1 \langle u_6 s \rangle, W_1 \langle s \rangle, U_0 \langle s \rangle, U \}$ . Außer  $\langle s \rangle$  und  $\langle w_1 s \rangle$  sind alle anderen  $X_1$ -invarianten Untergruppen von  $U$  auch unter  $X_1 \langle r_1 \rangle$  invariant.

(d) Es sei  $W_0 := \langle w_1 \rangle$ ,  $W_1 := \langle w_1, u_1, u_2, u_4 u_5, u_4 u_6 \rangle$ ,  $\tilde{W}_1 := \langle w_1, u_2 v_1 r_0, u_4 u_5 v_2 r_2, u_6 v_3 d_2, u_6 v_4 t_2 \rangle$ ,  $\tilde{U}_0 := \tilde{W}_1 \cdot \langle u_6 s \rangle$ ,  $W_2 := W_1 \tilde{W}_1 = \langle w_1, u_1, u_2, u_4 u_5, u_4 u_6, v_1 r_0, v_2 r_2, u_6 v_3 d_2, u_6 v_4 t_2 \rangle$ ,  $\tilde{U}^* := W_2 \langle u_6 s \rangle$  und  $W_3 := W_2 \langle s \rangle$ .

$I := \{ W_0, W_1, \tilde{W}_1, U_0, \tilde{U}_0, W_2, U^*, \tilde{U}^*, W_3, U \}$  ist die Menge der nichttrivialen  $X_2$ -invarianten Untergruppen von  $U$ . Sämtliche Elemente aus  $I$  sind unter  $X_2 \langle r_0 r_1 \rangle$  invariant; hingegen sind nur  $W_0, W_2, W_3$  und  $U$  auch invariant unter  $N_M(X_2 \bmod U) \cong E(2^{11}) \cdot \text{Aut}(\text{Alt}_6)$ .

Beweis. (a) In  $M_{24}$  gibt es genau fünf Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen, welche eine zu  $\text{Alt}_6$  isomorphe Untergruppe enthalten; Repräsentanten dieser Klassen sind isomorph zu  $M_{23}$ ,  $\text{Aut}(M_{22})$ ,  $L_3(4) \cdot \text{Sym}_3$ ,  $\text{Aut}(M_{12})$  und  $E(2^4) \cdot \text{Alt}_8$ . Eine genaue Inspektion der Operation dieser Gruppen in der Permutationsdarstellung von  $M_{24}$  bzgl. jeweils einer dieser maximalen Untergruppen liefert schließlich die Existenz von genau zwei Konjugiertenklassen von Untergruppen isomorph zu  $\text{Alt}_6$  in  $M_{24}$ ; ferner findet man Repräsentanten dieser Klassen in Untergruppen vom Isomorphietyp  $E(2^4) \cdot \text{Alt}_8$ .

Da  $E(2^4) \cdot \text{Sym}_6 = \bar{E}_2 \cdot \bar{B} \leq \bar{X} \cong E(2^4) \cdot \text{Alt}_8$  ist, finden wir dann in  $\bar{E}_2 \bar{B}$  Repräsentanten der beiden  $\bar{M}$ -Klassen von Untergruppen, welche zu  $\text{Alt}_6$  isomorph sind.

Wir betrachten nun die Gruppe  $E_2 \cdot B' = E_2 \cdot X_1$ . Ist dann  $\text{Alt}_6 \cong Y \leq E_2 X_1$  mit  $Y \not\leq \text{cc1}_{E_2 X_1}(X_1)$ , so können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $X_1 \cap Y \cong N_{E_2 X_1}(P) = N_{X_1}(P) = P \langle r_1 r_3 d_1 j_2 t_1 \rangle$  ist. Mit einfachen Rechnungen in der Matrizen-Gruppe  $E_2 X_1 (\leq L_0)$  verifizieren wir nun leicht, daß dann  $Y = X_2$  ist. Ferner gilt  $N_X(X_1) = X_1 N_X(P) = X_1 \cdot \langle r_3 d_1 \rangle \cong \text{Sym}_6$ .

Wir wissen, daß  $C_X(s) = A = \langle X_1, j_0, a_4 \rangle \cong \text{Alt}_7$  ist. Wegen  $\{f_0, r_1 r_3 d_1\} \leq X_1$  und  $C_U(f_0) = \langle w_1, w_2, s \rangle$  sowie  $[w_2, r_1 r_3 d_1] = u_2 w_1$ , folgt jetzt  $C_U(X_1) = \langle w_1, s \rangle$ .

Wir beachten, daß  $Q := \langle r_0 r_1 r_3 d_1, r_0 r_2 r_1 s_1, t_1 s_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $X_2$  ist. Mit Hilfe der Relationen in (3.2) - (3.4) berechnen wir  $C_U(Q) = \langle u_1, w_1, u_2 v_1 r_0 \rangle$  und  $a_1 a_3: u_1 \rightarrow u_1, w_1 \rightarrow w_1, u_2 v_1 r_0 \rightarrow u_2 u_3 u_5 v_1 r_0 v_2 r_2$ . Da  $x := r_1 r_3 d_1 j_2 t_1 \in X_2$  und  $j_2 = r_1 q_2 d_1 a_1 t_1$  ist, erhalten wir ferner  $[x, u_1] = u_2$ . Damit folgt nun  $C_U(X_2) = \langle w_1 \rangle$ .

Wegen  $N_M(\langle w_1, s \rangle)/U \cong L_3(4) \cdot \text{Sym}_3$ , ist dann offensichtlich  $N_{\overline{M}}(\overline{X}_1) = \overline{B} \cong \text{Sym}_6$  sowie  $N_{\overline{M}}(\overline{X}_2) \cong \text{Aut}(\text{Alt}_6)$ . Damit folgen nun alle weiteren Behauptungen in (a).

(b) Es sei  $i \in \{1, 2\}$ . Da  $U_0 = Z(UE_2) = C_U(E_2) \cong E(2^6)$  und  $E_2 X_1 = E_2 X_2$  gilt, ist  $U_0$  ein  $X_i$ -Modul, wobei die  $X_1$ -Untermodule genau die  $X_2$ -Untermodule von  $U_0$  sind. Alle weiteren Behauptungen in Teil (b) haben wir bereits im Beweis von (6.6) verifiziert.

(c) Da  $U^* = (UE_2)' = [U, E_2]$  ist, wird  $U^*$  von  $X_1$  normalisiert. Da  $X_1$  irreduzibel auf  $U^*/U_0$  und unzerlegbar auf  $U_0$  operiert, folgt mit  $C_{U^*}(X_1) = \langle w_1 \rangle$ , daß  $U_0$  die einzige  $X_1$ -invariante Untergruppe der Ordnung  $2^6$  in

$U^*$  ist. Um zu zeigen, daß  $U^*$  ein uniserieller  $X_1$ -Modul ist, genügt es offensichtlich, zu beweisen, daß  $U^*/W_1$  ein unzerlegbarer  $X_1$ -Modul ist.

Wir betrachten die Operation von  $f_0$  auf  $U$ ; es ist  
 $f_0: w_2 \rightarrow w_2, v_2 r_2 \rightarrow v_1 r_0 + u_1 v_2 r_2 v_3 d_2,$

$$v_4 t_2 \rightarrow v_3 d_2 + u_1 u_2 u_3 u_6 v_1 r_0 v_3 d_2 v_4 t_2.$$

Also gilt  $C_{U^*/W_1}(f_0) = \langle w_2 \rangle_{W_1/W_1} = U_0/W_1$  und außerdem  
 $[U^*/W_1, \langle f_0 \rangle] = \langle w_2 v_1 r_0, w_2 v_2 r_2, w_2 v_3 d_2, w_2 v_4 t_2 \rangle_{W_1/W_1} \cong E(2^4).$

Wegen  $a_1 a_3: w_2 v_1 r_0 \rightarrow u_1 w_2 v_1 r_0 v_2 r_2 \rightarrow w_2 v_2 r_2$  gilt dann  
 $[U^*/W_1, X_1] = U^*/W_1$ . Somit ist  $U^*/W_1$  ein unzerlegbarer  $X_1$ -Modul.

Alle weiteren Behauptungen in (c) ergeben sich nun trivialerweise aus der Tatsache, daß  $U^*$  uniseriell und  $C_U(X_1) = \langle w_1, s \rangle$  ist.

(d) Um die Struktur von  $U$  als  $X_2$ -Modul zu bestimmen, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $N := X_2 \langle r_0 r_1, r \rangle \cong \text{Aut}(\text{Alt}_6)$  und  $N_1 := X_2 \langle r_0 r_1 \rangle \cong \text{Sym}_6$  ist mit  $N_1 \not\leq N$ .

Wegen  $C_{UX}(W_1) = UE_2$  und  $N_{UX}(W_1) = UE_2 \cdot N_1$  sind dann offensichtlich  $W_1$ ,  $U_0$  und  $U^*$  alle  $N_1$ -invariant. Da ferner  $N_M(U_0) = N_M(U^*) = UX$  ist mit  $UX \cap N = N_1$ , ist dann  $\tilde{W}_1 := (W_1)^r \neq W_1$ ,  $\tilde{U}_0 := (U_0)^r \neq U_0$  und  $\tilde{U}^* := (U^*)^r \neq U^*$ . Natürlich sind  $\tilde{W}_1$ ,  $\tilde{U}_0$  und  $\tilde{U}^*$  auch  $N_1$ -invariant. Wegen  $U^* \cong \tilde{U}^* \cong E(2^{10})$  ist offensichtlich  $W_2 := U^* \cap \tilde{U}^* \cong E(2^9)$  sogar  $N$ -invariant.

Da  $W_0 = C_U(X_2)$  natürlich  $N$ -invariant ist und da mit  $U_0$  auch  $\tilde{U}_0$  als  $X_2$ -Modul uniseriell ist, folgt jetzt  $W_0 = W_1 \cap \tilde{W}_1 \leq W_1 \tilde{W}_1 = W_2$  und  $W_0 = U_0 \cap \tilde{U}_0$  sowie  $U_0 \tilde{U}_0 = U$ .

Da  $U/W_2$  nur eindimensionale  $X_2$ -Moduln involviert, ist dann  $W_2 = [U, X_2]$  die einzige  $X_2$ -invariante Untergruppe der Ordnung  $2^9$  in  $U$ .

Wir wollen nun  $\tilde{W}_1$  und  $W_2$  genauer bestimmen. Da  $Q := \langle r_0 r_1 r_3 d_1, r_0 r_2 r_1 s_1, t_1 s_2 \rangle \in \text{Syl}_2(X_2)$  ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $Q \langle r_0 r_1, r \rangle \in \text{Syl}_2(N)$  ist. Wir wissen bereits, daß  $C_U(Q) = \langle u_1, w_1, u_2 v_1 r_0 \rangle$  ist; insbesondere ist dann  $C_{W_1}(Q) = \langle w_1, u_1 \rangle$  und  $C_{\tilde{W}_1}(Q) = \langle w_1, u \rangle$  mit einem geeigneten Element  $u$  aus  $u_2 v_1 r_0 \langle u_1 \rangle$ . Wir beachten, daß

$$a_1 a_3: u_1 \rightarrow u_1, w_1 \rightarrow w_1, u_2 \rightarrow u_1 u_2 u_3 u_5 \rightarrow u_4 u_5 \rightarrow u_2,$$

$$v_1 r_0 \rightarrow u_1 v_1 r_0 v_2 r_2 \rightarrow v_2 r_2 \rightarrow v_1 r_0 \text{ gilt.}$$

Da  $w_1 \in \tilde{W}_1$  und  $u_1 \notin \tilde{W}_1$  ist, folgt  $C_{\tilde{W}_1}(Q) = \langle w_1, u_2 v_1 r_0 \rangle$ . Damit erhalten wir dann  $\langle w_1, u_2 v_1 r_0, u_4 u_5 v_2 r_2 \rangle \leq \tilde{W}_1$ .

Wir beachten nun, daß  $y = (a_1)^{j_0} \in A$  ist und berechnen dann

$$y: r_0 \rightarrow r_0 r_2 t_2, r_2 \rightarrow r_0 d_2 t_2, u_2 \rightarrow u_2 u_4 u_6, u_4 u_5 \rightarrow u_1 u_3 u_6,$$

$$v_1 r_0 \rightarrow u_3 u_4 u_5 v_1 r_0 v_2 r_2 v_4 t_2, v_2 r_2 \rightarrow u_1 u_2 u_3 u_6 v_1 r_0 v_3 d_2 v_4 t_2.$$

Damit folgt schließlich  $\tilde{W}_1 = \langle w_1, u_2 v_1 r_0, u_4 u_5 v_2 r_2, u_6 v_3 d_2, u_6 v_4 t_2 \rangle$  und  $W_2 = \langle w_1, u_1, u_2, u_4 u_5, u_4 u_6, v_1 r_0, v_2 r_2, u_6 v_3 d_2, u_6 v_4 t_2 \rangle$ .

Wir wollen jetzt  $\tilde{U}_0$  und  $\tilde{U}^*$  bestimmen. Dazu berechnen wir

$$y: u_1 \rightarrow u_2 u_5 u_6, u_2 \rightarrow u_2 u_4 u_6, u_3 \rightarrow u_2 u_3 u_4 u_6,$$

$$u_4 \rightarrow u_2 u_6, u_5 \rightarrow u_1 u_2 u_3, u_6 \rightarrow u_6.$$

Damit folgt dann  $C_U(P) = \langle w_1, u_6, s \rangle$ . Also ist  $\tilde{U}_0 = \tilde{W}_1 \langle v \rangle$  mit einem geeigneten Element  $v \in \langle u_6, s \rangle$ . Da  $x := r_0 r_1 r_3 d_1$  in  $X_2$  enthalten ist und  $[x, u_6] = u_2 w_1 \notin \tilde{W}_1$  sowie  $[x, s] = v_1 r_0 \notin \tilde{W}_1$  und  $[x, u_6 s] = w_1 u_2 v_1 r_0 \in \tilde{W}_1$  gilt, ist dann offensichtlich  $\tilde{U}_0 = \tilde{W}_1 \cdot \langle u_6 s \rangle$  und  $\tilde{U}^* = W_2 \tilde{U}_0 = W_2 \cdot \langle u_6 s \rangle$ .

Wir setzen nun noch  $W_3 := W_2 \cdot \langle s \rangle$ . Wegen  $W_2 = [U, X_2]$  ist  $W_3$  dann ein  $X_2$ -Modul. Ferner ist klar, daß  $U^*$ ,  $\tilde{U}^*$  und  $W_3$

die einzigen  $X_2$ -Untermodule von  $U$  der Ordnung  $2^{10}$  sind. Somit ist  $W_3$  sogar  $N$ -invariant.

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß die Menge der nicht-trivialen  $X_2$ -invarianten Untergruppen von  $U$  aus genau den folgenden Elementen besteht:  $W_0$ ,  $W_1$ ,  $\tilde{W}_1$ ,  $U_0$ ,  $\tilde{U}_0$ ,  $W_2$ ,  $U^*$ ,  $\tilde{U}^*$ ,  $W_3$  und  $U$ .

Wir nehmen zunächst an, daß  $Y \cong E(2^4)$  ein irreduzibler  $X_2$ -Untermodule von  $U$  ist. Offensichtlich gilt dann  $Y \leq W_2$  und  $\langle 1 \rangle \neq C_Y(Q) \leq C_U(Q) = C_{W_2}(Q) = \langle w_1, u_1, u_2 v_1 r_0 \rangle$ . Da  $\langle w_1, u_1 \rangle \leq W_1$  und  $\langle w_1, u_2 v_1 r_0 \rangle \leq \tilde{W}_1$  ist und da  $W_1$  und  $\tilde{W}_1$  beide unzerlegbare  $X_2$ -Module sind, existiert dann ein Element  $v \in u_1 u_2 v_1 r_0 \langle w_1 \rangle$  mit  $C_Y(Q) = \langle v \rangle$ . Da aber auch  $a_1 a_3 \in X_2$  ist, erhalten wir ferner  $Y \cap u_1 \langle w_1 \rangle \neq \emptyset$  und damit schließlich den Widerspruch  $Y \leq W_1$ . Also gibt es keine  $X_2$ -Untermodule in  $U$  von der Ordnung  $2^4$ .

Es sei nun  $Y \cong E(2^5)$  ein  $X_2$ -Untermodule von  $U$ . Offensichtlich gilt dann  $W_0 \leq Y \leq W_2$ . Mit Hilfe der Relationen in (3.2) - (3.4) berechnen wir  $C_{W_2}(Q \bmod \langle w_1 \rangle) = C_{W_2}(Q) = C_U(Q) = \langle w_1, u_1, u_2 v_1 r_0 \rangle$ . Jetzt liefern die gleichen Argumente wie im vorigen Falle, daß  $Y \in \{W_1, \tilde{W}_1\}$  ist.

Es sei nun  $Y \cong E(2^6)$  ein  $X_2$ -Untermodule von  $U$ . Offensichtlich ist  $Y_0 := W_2 \cap Y \cong E(2^5)$  und somit  $Y_0 \in \{W_1, \tilde{W}_1\}$ . Ferner ist  $E(2^2) \cong C_Y(P) \leq C_U(P) = \langle w_1, u_6, s \rangle$ . Wegen  $[s, r_0 r_1 r_3 d_1] = v_1 r_0 \notin (W_1 \cup \tilde{W}_1)$  ist dann  $Y = Y_0 \cdot \langle v \rangle$  mit  $v \in \{u_6, u_6 s\}$ . Da  $[u_6, r_0 r_1 r_3 d_1] = u_2 w_1 \in W_1 - \tilde{W}_1$  und  $[u_6 s, r_0 r_1 r_3 d_1] = w_1 u_2 v_1 r_0 \in \tilde{W}_1 - W_1$  ist, folgt schließlich  $Y \in \{U_0, \tilde{U}_0\}$ .

Ist  $Y \cong E(2^7)$  ein  $X_2$ -Untermodul von  $U$ , so gilt  $Y \cap U^* = U_0$  und  $Y \cap \tilde{U}^* = \tilde{U}_0$ ; damit folgt dann der Widerspruch  $Y \geq \langle U_0, \tilde{U}_0 \rangle = U$ . Also gibt es keine  $X_2$ -Untermodule der Ordnung  $2^7$  in  $U$ .

Da es keine  $X_2$ -invarianten Untergruppen der Ordnung  $2^4$  in  $U$  gibt, können auch keine  $X_2$ -invarianten Untergruppen der Ordnung  $2^8$  in  $U$  existieren. Damit haben wir die Behauptungen in (d) bewiesen.

Q.E.D.

Wir wollen in folgendem die 2-lokale Struktur der einfachen Gruppe  $G$  untersuchen. Wir betrachten dabei zunächst den Fall, daß  $G$  eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung  $2^{11}$  enthält.

Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß  $U \leq G$  und somit  $U \leq X := S \cap G \in \text{Syl}_2(G)$  ist. Wir setzen dann  $N := N_G(U) \leq M$  und  $\bar{M} := M/U$ ; ferner definieren wir  $\Gamma := \{ Y \mid Y \leq X, Y \not\leq U, \exists g \in G : Y^g \leq U \}$  sowie  $\alpha := \max\{ m(Y/(Y \cap U)) \mid Y \in \Gamma \}$ .

Offensichtlich ist  $U$  schwach abgeschlossen in  $X$  bzgl.  $G$ . Nach (1.16) ist  $U$  jedoch nicht stark abgeschlossen in  $X$  bzgl.  $G$ ; wir wenden nun (1.17) und (3.8) an und erhalten somit folgendes:

- (1) Es ist  $\Gamma \neq \emptyset$ ; ferner existiert zu jedem  $Y \in \Gamma$  ein Element  $g \in G$  mit  $Y^g \leq U$  und  $(N_X(Y))^g \leq X$ .
- (2) Ist  $t$  eine Involution aus  $X - U$  mit  $\text{ccl}_G(t) \cap U \neq \emptyset$ , so ist  $4 \leq m([U, t]) \leq \alpha \leq 6$ .
- (3) Ist  $Y \in \Gamma$  von maximaler Ordnung und  $t \in Y - U$ , so ist  $|Y| \geq |C_U(t)| \cdot |[U, t] \cap (Y \cap U)| \geq |[U, t]| \cdot |Y \cap U|$ .

Es sei nun  $Y \in \Gamma$  von maximaler Ordnung. Dann existiert eine Untergruppe  $Y_0$  von  $T$  mit  $UY = U \cdot Y_0 \leq X \leq S = U \cdot T$ . Da  $E(2^4) \leq [U, t] \leq Y/(Y \cap U)$  ist für  $t \in Y - U$ , ist dann  $Y_0 \cong E(2^\beta)$  mit  $4 \leq \beta \leq \alpha \leq 6$ .

Wir nehmen zunächst an, daß  $\beta = 4$  ist. Dann gilt also  $\bar{Y} \cong \bar{Y}_0 \cong [U, t] \cong E(2^4)$  für alle  $t$  aus  $Y - U$ ; somit enthält  $\bar{Y}$  nur 2-zentrale Involutionen aus  $\bar{M}$ . Wir können in dieser Situation nun (3.30) anwenden und erhalten dann, daß

o.B.d.A.  $Y_0$  eine der folgenden Gruppen ist:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  
 $\langle r_0, r_1, r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$ ,  $\langle r_0, r_2, r_3 d_1, r_1 r_3 s_1 \rangle$  oder  $\langle r_1, r_3, d_1, s_1 \rangle$ .

Ist  $Y_0 = E_1$ , so gilt  $Y \cap U \leq C_U(E_1) = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 r_0 \rangle$ ;  
damit gilt also insbesondere  $|Y| \leq 2^6$ . Wegen  $r_0 \in Y_0$  und  
 $C_U(r_0) \cong E(2^7)$  sowie  $[U, r_0] = C_U(E_1)$  erhalten wir jetzt  
mit (3) den Widerspruch  $2^8 \geq |Y| \geq 2^7 \cdot |Y \cap U| \geq 2^{10}$ .

Ist  $Y_0 = E_2$ , so ist  $Y \cap U \leq C_U(E_2) = U_0$ ; wegen  $r_0 \in E_2$   
gilt außerdem  $|Y| \geq 2^7$ . Da  $Y$  elementar-abelsch ist, folgt  
dann  $Y \leq V$  oder  $Y \leq W$ . Da  $s \in U$  ist mit  $W^S = V$ , können  
wir o.B.d.A. annehmen, daß  $Y \leq V$  gilt. Aus (3.8) folgt nun  
 $V \leq C_J(Y) \leq V \cdot \langle x_1 \rangle$  sowie  $U \leq C_J(Y^g) \leq U \cdot \langle x_2 \rangle$  mit geeigneten  
Involutionen  $x_1$  und  $x_2$ , wobei  $g \in G$  ist mit  $Y^g \leq U$ ;  
wir haben damit aber offensichtlich einen Widerspruch herge-  
leitet.

Es sei nun  $Y_0 = \langle r_0, r_1, r_3 d_1, t_1 s_2 \rangle$ . Dann gilt  
 $Y \cap U \leq C_U(Y_0) = \langle u_1, u_2, w_1, v_1 r_0 \rangle$  und somit  $2^7 \leq |Y| \leq 2^8$   
sowie  $2^3 \leq |Y \cap U| \leq 2^4$ . Da nun  $Y \cap U \cap [U, r_0] \cong E(2^2)$  gilt,  
erhalten wir mit (3) offensichtlich einen Widerspruch.

Es sei nun  $Y_0 = \langle r_0, r_2, r_3 d_1, r_1 r_3 s_1 \rangle$ . Dann gilt  
 $Y \cap U \leq C_U(Y_0) = \langle u_1, u_2 w_1, u_3 u_5 \rangle$  und damit offensichtlich  
 $Y \cap U = C_U(Y_0) \cong E(2^3)$  sowie  $|Y| = 2^7$ . Mit (3) folgt dann  
 $Y \cap U \cap [U, t] = \langle 1 \rangle$  für alle Involutionen  $t$  aus  $Y_0$ . Da  
aber  $\langle u_1 \rangle \leq [U, r_0]$  ist, haben wir einen Widerspruch herge-  
leitet.

Ist  $Y_0 = \langle r_1, r_3, d_1, s_1 \rangle$ , so erhalten wir wegen  
 $C_U(Y_0) = \langle u_1, v_1 r_0, v_2 r_2 \rangle \cong E(2^3)$  und  $C_U(r_1) \cong E(2^7)$  sowie  
 $\langle u_1 \rangle \leq [U, r_1]$  ebenso wie im vorigen Falle einen Widerspruch.

Wir haben also gezeigt, daß  $5 \leq \beta \leq \alpha \leq 6$  ist.



Wir betrachten nun den Fall, daß  $Y_0 \cong E(2^5)$  ist. Nach (3.30) gilt dann entweder  $Y_0 < R_i$  mit  $i \in \{1, 2\}$  oder es ist o.B.d.A.  $Y_0 = \langle r_0, r_1, t_1, d_j, s_j \rangle$  mit  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ . In jedem Falle enthält  $Y_0$  dann Involutionen  $x$  und  $y$  derart, daß  $\bar{x}$  2-zentral und  $\bar{y}$  nicht-2-zentral in  $\bar{M}$  ist. Mit  $C_U(x) \cong E(2^7)$  und  $C_U(y) \cong E(2^6)$  folgt aus (3) dann  $2^7 \leq |Y| = 2^5 \cdot |Y \cap U| = 2^6 \cdot |[U, y] \cap (Y \cap U)|$  sowie  $E(2^6) \cong C_U(y) = (Y \cap U)[U, y] > [U, y] \cong E(2^5)$ .

Ist  $Y_0 = \langle r_0, r_1, t_1, d_2, s_2 \rangle$ , so ist  $C_U(Y_0) = \langle u_1, u_2 \rangle$  und damit  $Y \cap U = C_U(Y_0)$  sowie  $Y \cong E(2^7)$ . Aus (3) folgt nun  $2^7 = |Y| \geq |C_U(r_0)| \cdot |[U, r_0] \cap (Y \cap U)| = 2^9$ , welches jedoch absurd ist.

Ist  $Y_0 < R_1$ , so gilt  $\langle u_1 \rangle < C_U(Y_0) = Y \cap U \cong E(2^2)$ ; es folgt  $2^7 = |Y| \geq 2^7 \cdot |[U, x] \cap (Y \cap U)|$ . Da  $x \in R_1 \leq E$  ist, gilt  $\langle u_1 \rangle \leq [U, x]$ ; damit erhalten wir jetzt offensichtlich einen Widerspruch.

Es gilt also  $Y_0 = \langle r_0, r_2, t_2, d_1, s_1 \rangle$  oder  $Y_0 < R_2$ ; im ersten Falle ist  $Y \cap U \leq C_U(Y_0) = \langle u_1, u_3, u_4, u_5 \rangle$  und im zweiten Falle gilt  $Y \cap U \leq C_U(Y_0) = C_U(R_2) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$ .

Wir nehmen nun an, daß  $Y \cong E(2^7)$  ist. Dann gilt also  $E(2^2) \cong Y \cap U < C_U(Y_0)$  und  $Y \cap U \cap [U, x] = \langle 1 \rangle$ . Offensichtlich existiert eine Involution  $r$  in  $Y_0 \cap \langle r_0, r_2 \rangle$ . Da  $\bar{r}$  2-zentral in  $\bar{M}$  ist, erhalten wir nun mit (3.4) den Widerspruch  $Y \cap U \cap [U, r] \neq \langle 1 \rangle$ .

Es ist also  $Y \cong E(2^8)$  und  $Y \cap U = C_U(Y_0) \cong E(2^3)$ . Wir wählen  $r$  wie oben und erhalten mit (3) dann schließlich  $Y \cap U \cap [U, r] = C_U(Y_0) \cap [U, r] \leq Z_2$ . Nun verifizieren wir mit den Relationen aus (3.4) leicht, daß andererseits in jedem Falle  $E(2^2) \leq C_U(Y_0) \cap [U, r]$  gilt.

Aus dem letzten Widerspruch folgt jetzt  $\alpha = \beta = 6$  und somit  $E(2^6) \cong Y_0 \in \{R_1, R_2\}$ .

Ist  $Y_0 = R_1$ , so ist wegen  $C_U(R_1) = \langle u_1 \rangle$  dann offensichtlich  $Y \cap U = \langle u_1 \rangle$  und  $Y \cong E(2^7)$ ; mit (3) folgt nun aus Ordnungsgründen  $\langle u_1 \rangle \cap [U, r_0] = \langle 1 \rangle$ , welches jedoch den Tatsachen widerspricht.

Es gilt also  $Y_0 = R_2$  und  $Y \cap U \leq C_U(R_2) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$ . Wir beachten nun, daß  $R_2$  normal in  $T$  ist und daß die Gruppen  $\langle u_1 \rangle$ ,  $\langle u_2 \rangle$ ,  $\langle u_4 \rangle$ ,  $\langle u_1, u_2 \rangle$ ,  $\langle u_1, u_4 \rangle$ ,  $\langle u_2, u_4 \rangle$  sowie  $C_U(R_2)$  Repräsentanten der verschiedenen  $T$ -Klassen von nichttrivialen Untergruppen in  $C_U(R_2)$  sind. Da die Elemente  $\bar{r}_0$ ,  $\bar{r}_2$  und  $\bar{d}_2$  alle 2-zentrale Involutionen in  $\bar{M}$  sind mit  $[U, r_0] \geq \langle u_1, u_2 \rangle$ ,  $[U, r_2] \geq \langle u_1, u_4 \rangle$  sowie  $[U, d_2] \geq \langle u_2, u_4 \rangle$ , sehen wir nun mittels (3) leicht, daß  $Y \cap U = C_U(R_2) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$  und somit  $Y \cong E(2^9)$  ist. Mit Lemma (5.3) erhalten wir jetzt folgendes:

- (4) Ist  $Y \in \Gamma$  von maximaler Ordnung, so ist  $Y$  in  $S$  zu  $P := C_U(R_2) \times R_2 \cong E(2^9)$  konjugiert; insbesondere ist  $Y \cap U = C_U(R_2)$  und  $UY = U \cdot R_2$ .

Mit (4) sind offensichtlich die Voraussetzungen von Lemma (1.18) erfüllt; also gilt folgendes:

- (5)  $X$  ist eine Sylow 2-Untergruppe von  $N'$ ; insbesondere ist dann  $N = O^2(N)$ .

Aus (2.2) erhalten wir  $N < M$ . Eine Inspektion der maximalen Untergruppen von  $M_{24}$  zeigt, daß es genau drei verschiedene  $\bar{M}$ -Klassen von maximalen Untergruppen gibt, welche eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung  $2^6$  ent-

halten; Repräsentanten dieser Klassen sind die Gruppen

$$N_{\overline{M}}(\overline{E}_2) \cong E(2^4) \cdot \text{Alt}_8, \quad N_{\overline{M}}(\overline{R}_1) \cong E(2^6) \cdot {}^3\text{Sym}_6 \quad \text{ sowie } \\ N_{\overline{M}}(\overline{R}_2) \cong E(2^6) \cdot [L_3(2) \times \text{Sym}_3].$$

Wir beachten nun, daß

$$(UE_2A_2)' = U * E_2 \cdot A_2 \quad \text{ ist mit } |UE_2A_2 : U * E_2A_2| = 2 \quad \text{ und } \\ U \not\leq U * E_2A_2.$$

Aus (5) folgt jetzt, daß  $N$  in  $M$  nicht zu einer Untergruppe von  $UE_2A_2$  konjugiert ist. Da  $\overline{R}_1$  und  $\overline{R}_2$  die einzigen elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung  $2^6$  der Sylow 2-Untergruppe  $\overline{T} = \overline{S}$  von  $\overline{M}$  sind,

können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß es ein  $i \in \{1, 2\}$  gibt mit  $\overline{R}_2 \leq \overline{X} \leq (\overline{N})' = \overline{N}' \leq \overline{N} \leq N_{\overline{M}}(\overline{R}_1)$ . Wegen (5) folgt sogar  $\overline{N} \leq N_{\overline{M}}(\overline{R}_i)'$ .

Wir nehmen nun an, daß  $\overline{N}$  nicht in  $N_{\overline{M}}(\overline{R}_2)$  enthalten ist. Somit ist also  $\overline{N} \leq N_{\overline{M}}(\overline{R}_1)' \cong E(2^6) \cdot {}^3\text{Alt}_6$ . Wir beachten, daß  $\overline{NR}_1/\overline{R}_1 \cong \overline{R}_2\overline{R}_1/\overline{R}_1 \cong E(2^2)$  ist. Da nach (5) außerdem auch  $\overline{N} \cong O^2(\overline{N})$  gilt und da  $E(2^6) \cdot Z_3 \cong \overline{R}_1 \cdot \langle \overline{a}_1 \rangle \not\leq N_{\overline{M}}(\overline{R}_1)'$  ist, liefert eine Inspektion der Untergruppen von  $\text{Alt}_6$  nun, daß  $\overline{R}_1 \cdot \langle \overline{a}_1 \rangle \overline{N} / (\overline{R}_1 \cdot \langle \overline{a}_1 \rangle)$  isomorph zu  $\text{Alt}_5$  oder  $\text{Alt}_6$  ist. Damit ist also  $\overline{R}_1 \overline{N} / \overline{R}_1$  isomorph zu  $\text{Alt}_5$ ,  $Z_3 \times \text{Alt}_5$  oder  ${}^3\text{Alt}_6$ . Wir wissen ferner, daß  $E(2^4) \cong \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \leq \overline{N}$  ist.

Wir verifizieren nun leicht, daß es in  $\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2$  genau 9 Involutionen gibt, welche in  $\overline{M}$  2-zentral sind. Ist nun  $\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 < \overline{D} < \overline{R}_1$ , so ist  $\overline{D}$  unter  $\langle \overline{a}_1 \rangle$  zu  $(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2) \cdot \langle \overline{d}_1 \rangle$  konjugiert; jetzt rechnen wir leicht nach, daß diese Gruppe genau 21 Involutionen enthält, welche in  $\overline{M}$  2-zentral sind. Da in  $\overline{M}$  2-zentrale Involutionen nicht von Elementen der Ordnung fünf zentralisiert werden, folgt jetzt  $\overline{R}_1 \leq \overline{N}$ .

Wir haben also gezeigt, daß  $\overline{R}_1 \overline{R}_2 \leq \overline{N} \leq N_{\overline{M}}(\overline{R}_1)'$  ist und  $\overline{N} / \overline{R}_1$  isomorph zu  $\text{Alt}_5$ ,  $Z_3 \times \text{Alt}_5$  oder  ${}^3\text{Alt}_6$ .

Insbesondere ist  $O_2(N) = UR_1 = E \cdot Q$  mit  $Q := \langle u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, s \rangle$  und  $N \leq C := H \cap G$ . Wir setzen nun  $E_0 := E \langle a_1 \rangle \cap G$ ; dann ist  $E \leq E_0 \trianglelefteq N$  und  $N/E_0 \cong E(2^4) \cdot \text{Alt}_5$  oder  $N/E_0 \cong E(2^4) \cdot \text{Alt}_6$ .

Nach (1) existiert ein Element  $g \in G$  mit  $N_X(P)^g \leq X$ . Wir wissen, daß  $UR_1 R_2 = E \cdot Q \cdot \langle d_2, s_2 \rangle \leq X \leq S$  ist; insbesondere ist  $E$  die einzige extraspezielle Untergruppe der Ordnung  $2^{13}$  in  $X$ . Da  $E \leq N_X(P)$  ist, folgt  $g \in C$ . Wegen  $\langle N, a_1 \rangle \leq M$  und  $g \notin M$ , ist  $N < \langle N, N^g \rangle \leq C$ . Da  $N/E_0 < C/E_0 \leq \text{Aut}(M_{22})$  gilt, liefert eine Inspektion der maximalen Untergruppen von  $M_{22}$  nun, daß  $C/E_0$  isomorph zu  $L_3(4)$ ,  $L_3(4) \cdot Z_2$ ,  $M_{22}$  oder  $\text{Aut}(M_{22})$  ist. In jedem Falle ist  $O_2(C) = E \cong \text{Ex}(2^{13})$ . Mit (1.13) erhalten wir jetzt den Widerspruch  $G \in \mathcal{K}$ .

Wir haben also gezeigt, daß  $\bar{N} \leq N_{\bar{M}}(\bar{R}_2)$  ist. Da  $N_{\bar{M}}(\bar{R}_2)$  eine maximale Untergruppe von  $\bar{M}$  ist, sehen wir mit Hilfe der Ergebnisse in (3.10) nun leicht, daß die Gruppe  $N_0 := U \cdot R_2 \cdot L_2 \cdot \langle a_6, t_2 \rangle$  das volle Urbild von  $N_{\bar{M}}(\bar{R}_2)$  in  $\bar{M}$  ist; dabei gilt  $\langle a_6, t_2 \rangle \cong \text{Sym}_3$ ,  $L_2 = \langle d_1, s_1, t_1, q_2, a_1 \rangle \cong L_3(2)$  sowie  $[R_2, \langle a_6, t_2 \rangle] = R_2$  und  $[\langle q_2, a_1 \rangle, \langle a_6, t_2 \rangle] = \langle 1 \rangle$ . Da  $C_{R_2}(a_6) = \langle 1 \rangle$  ist, berechnen wir jetzt mit den Relationen aus (3.2) - (3.4) leicht  $\tilde{L} := C_{R_2 L_2}(a_6) = \langle q_2, a_1, d_2 t_1 \rangle \cong L_3(2)$ . Somit gilt also  $U \cdot R_2 \trianglelefteq N \leq (N_0)' = UR_2 \cdot (\tilde{L} \times \langle a_6 \rangle)$ . Wegen  $UR_2 \tilde{L} = UR_2 L_2 \leq UE_2 A_2$  ist ferner  $N$  nicht in  $UR_2 \tilde{L}$  enthalten.

Wir haben damit das folgende Resultat bewiesen:

(6.8) Lemma. Es sei  $U \leq G$  und  $N := N_G(U) = M \cap G$ ; wir setzen ferner  $\tilde{L} := \langle q_2, a_1, d_2 t_1 \rangle \cong L_3(2)$  sowie  $P := C_U(R_2) \times R_2 \cong E(2^9)$ . Dann gilt folgendes:

(a) Es ist  $UR_2 \not\leq N = O^2(N) \leq UR_2 \cdot (\tilde{L} \times \langle a_6 \rangle)$ ; außerdem ist  $N$  nicht in  $UR_2 \cdot \tilde{L} = UR_2 \cdot L_2$  enthalten.

(b) Es ist  $Syl_2(N) \leq Syl_2(G)$ , wobei wir o.B.d.A. annehmen können, daß  $X := UR_2 \cdot (\langle d_1, s_1, t_1 \rangle \cap G)$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $N$  ist.

(c) Es gibt ein Element  $g \in G$  derart, daß  $P^g \leq U$  und  $(N_X(P))^g \leq X$  ist.

Wir sind nun auch in der Lage, das folgende wichtige Resultat zu beweisen.

(6.9) Lemma. Jede 2-lokale Untergruppe von  $G$  ist eine  $\{2, 3, 5, 7\}$ -Gruppe.

Beweis. Es sei also  $X$  eine 2-lokale Untergruppe von  $G$ ; wir setzen dann  $Q := O_2(X)$  und  $\Pi_0 := \Pi(X)$ . Nach (5.1) gilt dann  $\Pi_0 \leq \{2, 3, 5, 7, 11, 23, 31\}$ .

Ist  $31 \in \Pi_0$ , so können wir nach (5.1) ferner o.B.d.A. annehmen, daß  $X \leq L$  ist. Nach (3.20) und (3.21) gilt außerdem  $E(2^5) \leq Q \leq C_J(Q) = V \cong E(2^{10})$ . Da nach (1.8) die Sylow 2-Untergruppen von  $G$  nicht abelsch sind, folgt mit (1.1) nun  $X/Q \cong L_5(2)$  und damit schließlich  $Q = V$  sowie  $X = L$ . Mit (2.6) und (4.1) folgt nun der Widerspruch  $G = J$ .

Ist  $23 \in \Pi_0$ , so folgt mit (5.1) dann o.B.d.A.  $X \leq M$  und  $Q = U$ ; nun liefert aber (6.8) offensichtlich einen Widerspruch.

Wir betrachten abschließend also den Fall, daß  $11 \in \Pi_0$  ist. Nach (5.1) können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß entweder  $X \leq H$  oder  $X \leq M$  gilt. Da es weder in  $\text{Aut}(M_{22})$  noch in  $M_{24}$  nichttriviale 2-Gruppen gibt, welche von Elementen der Ordnung 11 normalisiert werden, ist folglich  $Q \leq O_2(H) = E$  oder  $Q \leq O_2(M) = U$ .

Es sei nun  $Z_{11} = \langle x \rangle \leq X$ . Ist  $X \leq H$ , so gilt dann  $E_0 := C_E(x) = Q_8$  und  $\tilde{E}_0 := [E, x] = E x(2^{11})$ ; da in  $G$  die 2-lokalen Untergruppen 2-constrained sind, ist  $\tilde{E}_0 \leq Q \leq E$ . Insbesondere ist dann  $Q$  eine 2-Gruppe von symplektischem Typ; da  $X = G \cap H = C_G(u_1)$  ist, haben wir einen Widerspruch zu (6.2.f) erhalten. Wir haben damit also gezeigt, daß  $X \leq M$  gilt.

Nach (6.8) ist offensichtlich  $Q < U$ ; da außerdem  $X$  2-constrained ist, gilt  $Q \neq C_U(x) = Z_2$ . Damit erhalten wir also  $Q := [U, x] = E(2^{10})$ . Nach (6.5) ist ferner  $X/Q$  isomorph zu einer Untergruppe von  $\text{Aut}(M_{12})$ .

Es sei nun  $X_2 \in \text{Syl}_2(X)$ ; dann ist offensichtlich  $X_2$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $G$  und  $Q$  schwach abgeschlossen in  $X_2$  bzgl.  $G$ . Nach (1.16) ist  $Q$  jedoch nicht stark abgeschlossen in  $X_2$  bzgl.  $G$ .

Wir wollen jetzt (1.17) anwenden und führen zweckmäßigerweise die folgenden Bezeichnungen ein: Es sei  $\bar{M} := M/U$  und  $N := N_M(Q) = U \cdot N_0$  mit  $N_0 \cong \text{Aut}(M_{12})$ ; ferner seien  $x_0, x_1$  und  $x_2$  Involutionen aus  $N - U$  derart, daß  $\bar{x}_0, \bar{x}_1$  und  $\bar{x}_2$  Repräsentanten der drei verschiedenen konjugierten Klassen

von Involutionen in  $\bar{N} = \bar{N}_0$  sind. Wir nehmen dabei o.B.d.A. an, daß  $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1\} \subseteq (\bar{N})'$  und  $\bar{x}_2 \in \bar{N} - (\bar{N})'$  ist und daß  $C_{\bar{N}}(\bar{x}_0) \cong \text{Ex}(2^5) \cdot \text{Sym}_3$  sowie  $C_{\bar{N}}(\bar{x}_1) \cong Z_2 \times \text{Sym}_5$  gilt.

Nach (1.17) existiert eine Untergruppe  $Y$  in  $X_2$  derart, daß  $Y \not\subseteq Q$  und  $Y^g \leq Q$  ist für ein  $g \in G$ ; außerdem gilt  $m([Q, t]) \leq m(X_2/Q)$  für Involutionen  $t$  aus  $Y - Q$ .

Da  $C_Q(x) = \langle 1 \rangle$  ist und da  $N_{\bar{N}}(\langle \bar{x} \rangle) \cong Z_{11} \cdot Z_{10}$  sowie  $N_{\bar{N}}(\langle \bar{x} \rangle) \cong Z_{11} \cdot Z_5$  ist, gilt dann  $C_Q(x_2) = [Q, x_2] \cong E(2^5)$ . Da der 2-Rang von  $\text{Aut}(M_{12})$  bekanntlich vier ist, gilt also  $\bar{Y} \cap \text{ccl}_{\bar{N}}(\bar{x}_2) = \emptyset$ ; insbesondere ist dann  $\bar{Y} \leq \bar{N}' \cong M_{12}$ . Offensichtlich ist  $\bar{x}_1$  eine nicht-2-zentrale Involution aus  $\bar{M}$ ; also ist  $C_U(x_1) \cong E(2^6)$  und somit  $[Q, x_1] \cong E(2^4)$ . Da  $M_{12}$  den 2-Rang drei hat, folgt also  $\bar{Y} \cap \text{ccl}_{\bar{N}}(\bar{x}_1) = \emptyset$  und damit  $(\bar{Y})^* \leq \text{ccl}_{\bar{N}}(\bar{x}_0)$  sowie  $m([Q, t]) \leq m(QY/Q) \leq 3$  für alle Involutionen  $t$  aus  $Y - Q$ .

Da  $E(2^6) \leq C_U(x_0) \leq E(2^7)$  ist, erhalten wir jetzt offensichtlich  $C_Q(x_0) = C_U(x_0) \cong E(2^7)$  und  $QY/Q \cong E(2^3)$ . In  $\bar{N}'$  gibt es bekanntlich eine Untergruppe  $\bar{D} \cong M_{11}$ ; da  $\bar{D}$  nur eine Konjugiertenklasse von Involutionen hat und da außerdem  $|\bar{D}|_2 = 2^4$  sowie  $|\bar{N}'|_2 = 2^6$  ist, sehen wir nun leicht, daß  $\bar{x}_0$  ein Element  $\bar{f}$  der Ordnung fünf aus  $\bar{N}'$  invertiert. Damit erhalten wir jetzt  $C_Q(f) \cong E(2^4)$ , welches der Tatsache widerspricht, daß  $C_U(f) \cong E(2^3)$  gilt. Wir haben einen endgültigen Widerspruch erhalten und somit das Lemma bewiesen.

Q.E.D.

(6.10) Lemma. Es sei  $P \in \text{Syl}_3(G)$  und  $Z_3 \cong X \leq P$ .

Dann gilt folgendes:

(a)  $N_G(P)/C_G(P)$  ist isomorph zu einer Untergruppe von  $SD_{16}$ , welche mindestens die Ordnung vier hat.

(b) Ist  $E(3^2) \cong P_0 \leq P \cong \text{Ex}(3^3)$ , so sind alle Elemente aus  $P_0 - Z(P)$  in  $N_G(P_0)$  konjugiert.

(c) Ist  $X \neq P'$ , so gilt  $N_G(X)/C_G(X) \cong Z_2$ .

(d) Es sei  $C_G(X)/X$  isomorph zu einem Element  $Q$  aus  $\Omega := \{ \text{Alt}_4, \text{Sym}_4, \text{Alt}_5, \text{Sym}_5, L_2(7), L_2(11), \text{Alt}_6 \}$ . Dann gibt es in jeder Untergruppe  $P_0 \cong E(3^2)$  von  $G$  eine Untergruppe  $Y \cong Z_3$  derart, daß  $C_G(Y)/Y$  nicht zu einem Element aus  $\Omega$  isomorph ist.

Beweis. (a) Da es in  $J$  genau eine Konjugiertenklasse von zu  $E(3^2)$  isomorphen Untergruppen gibt, können wir also annehmen, daß es Untergruppen  $P_0$  und  $P_1$  in  $J$  gibt mit  $E(3^2) \cong P_0 \leq P \leq P_1 \cong \text{Ex}(3^3)$ . Wir wissen, daß  $C_J(P_1) \cong Z_6$  und  $N_J(P_1)/C_J(P_1) \cong E(3^2) \cdot SD_{16}$  sowie  $C_J(P_0)/P_0 \cong E(2^3)$  und  $N_J(P_0)/C_J(P_0) \cong GL_2(3)$  ist.

Wir setzen nun  $C_0 := P \cdot C_G(P)$ ; dann ist offensichtlich  $C_0 = P \cdot O_3(N_G(P))$  und  $N_G(P)/C_0 \leq SD_{16}$ . Mit einem Theorem von Smith und Tyrer [64] folgt außerdem  $N_G(P)/C_0 \not\cong Z_2$ .

Ist  $P \cong E(3^2)$ , so folgt aus einem wohlbekannten Satz von Burnside auch  $N_G(P) \neq C_0$ . Wir nehmen somit nun an, daß  $P = P_1$  und  $N_G(P) = C_0$  ist.

Offensichtlich ist  $C_0 = P \times C_1$  mit  $\langle 1 \rangle \leq C_1 \leq Z_2$ . Mit dem Frattini-Argument folgt ferner  $N_G(Z(P)) = C_0$ .



Da  $\exp(P) = 3$  ist und eine minimale nichtabelsche einfache Sektion von  $G$  isomorph zu  $\text{Alt}_5$ ,  $L_3(2)$  oder  $L_2(23)$  ist, gibt es in  $P$  dann ein Element  $x \neq 1$ , welches von einem Element  $t$  von 2-Potenzordnung in  $G$  invertiert wird. Offensichtlich gilt  $\text{ccl}_G(x) \cap Z(P) = \emptyset$ . Wir können somit o.B.d.A. annehmen, daß  $P_0 = Z(P) \times \langle x \rangle \in \text{Syl}_3(C_G(x))$  und  $\langle t \rangle \leq N_G(P_0)$  ist. Da  $P \cong \text{Ex}(3^3)$  ist, folgt  $\text{ccl}_G(x) \cap P_0 = P_0 - Z(P)$  und damit  $\langle t \rangle \leq N_G(Z(P)) = C_0$ . Jetzt erhalten wir den Widerspruch  $\langle t \rangle \leq O_2(C_0) = C_1 \leq C_G(P) \leq C_G(x)$ . Wir haben also gezeigt, daß  $N_G(P) \neq C_0$  ist.

(b,c) Aus (a) und der Struktur von  $\text{SD}_{16}$  folgt die Existenz einer Involution in  $N_G(P)/(\text{PC}_G(P))$ , welche auf  $P/Z(P)$  invertierend operiert. Damit folgt nun unmittelbar die Aussage in (b) und in (c)

(d) Wir beachten, daß  $\Omega$  die Menge der Isomorphietypen  $\text{PSL}_2(q)$ ,  $\text{PGL}_2(q)$  und  $\text{PSL}_2^*(q)$  mit ungerader Primzahlpotenz  $q$  ist, welche in  $M_{22}$  involviert sind. Damit folgt die Behauptung unter (d) unmittelbar aus einem Theorem von O'Nan [51].

Q.E.D.

(6.11) Lemma. Es sei  $\langle 1 \rangle \neq P \in \text{Syl}_{11}(G)$ ; dann liegt genau einer der folgenden vier Fälle vor:

(1) Es ist  $C_G(P) = P \times D$  mit  $P \cong Z_{11}$ ,  $D \cong Z_3$  und  $N_G(P)/P \cong \text{Sym}_3 \times Z_5$ ; ein Sylow 5-Normalisator von  $G$  ist isomorph zu  $D_{10} \times \text{Sym}_3$ .

Es gilt ferner  $C_G(D) = D \times \tilde{L}$  und  $N_G(D) = C_G(D) \cdot \langle t \rangle$  mit  $L_2(11) \cong \tilde{L} \trianglelefteq \tilde{L} \cdot \langle t \rangle \cong \text{PGL}_2(11)$ ; ist  $\tilde{D} \in \text{Syl}_3(C_G(D))$ , so ist  $C_G(\tilde{D})/\tilde{D} \cong Z_2$  und  $N_G(\tilde{D})/C_G(\tilde{D})$  ist isomorph zu  $E(2^2)$ ,  $D_8$  oder  $Z_2 \times \text{Sym}_3$ .

(2) Es ist  $P = C_G(P) \cong Z_{11}$  und  $N_G(P)/P \cong Z_{10}$ .

(3) Es ist  $P = C_G(P) \cong E(11^2)$  mit  $C_G(x) = P$  für Elemente  $x$  aus  $P^\#$ ; außerdem ist  $N_G(P)/P$  isomorph zu  $Z_5$  oder  $Z_{10}$ .

(4) Es ist  $P \cong \text{Ex}(11^3)$  mit  $C_G(P) = Z(P)$  sowie  $C_G(x) = C_P(x)$  für Elemente  $x$  aus  $P^\#$ ; ferner ist  $N_G(P)/P$  isomorph zu  $\langle 1 \rangle$  oder  $Z_5$ .

Beweis. Es sei also  $\langle 1 \rangle \neq P \in \text{Syl}_{11}(G)$ ; ferner sei o.B.d.A.  $P_0 \in \text{Syl}_{11}(J)$  mit  $P \leq P_0$ . Aus (3.18) wissen wir, daß  $N_G(P) \leq N_J(P_0) \cong \text{Ex}(11^3) \cdot [\text{GL}_2(3) \times Z_5]$  ist.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß es in  $N_G(P)$  eine Untergruppe  $D \cong Z_3$  gibt. Nach (3.18) ist dann insbesondere  $P \in \{P_0, Z(P_0)\}$  und  $[D, Z(P)] = \langle 1 \rangle$ . Somit gilt also  $D \times Z(P) \leq C_G(D) \leq C_J(D) \cong \hat{M}_{22}$  und  $E(3^2) \leq C_G(D)$ ; nach (6.9) ist ferner  $C_G(D) \cap Z(C_J(D)) = D$ . Eine Inspektion der maximalen Untergruppen von  $M_{22}$  liefert nun  $C_G(D) = D \times \tilde{L}$  mit  $\tilde{L} \cong L_2(11)$ .

Mit (6.10) erhalten wir jetzt  $N_G(D) = C_G(D) \cdot \langle t \rangle$  mit einer Involution  $t$  derart, daß  $\tilde{\Gamma} \cdot \langle t \rangle \cong \text{PGL}_2(11)$  ist. Außerdem können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $\langle t \rangle \leq N_G(Z(P))$  gilt. Da  $N_J(Z(P_0)) = N_J(P_0)$  ist, enthält  $N_G(P)$  dann eine Gruppe  $D \cdot \langle t \rangle \times F \cong \text{Sym}_3 \times Z_5$  mit  $F \cong Z_5$ . Offensichtlich ist  $t$  nicht-2-zentral in  $N_J(P_0)$ ; also gilt  $C_{P_0}(t) \neq \langle 1 \rangle$  und somit dann schließlich  $P = Z(P_0)$ . Da  $C_J(P)/P_0 \cong Q_8 \cdot Z_3$  ist, folgt außerdem  $N_G(P)/P \cong \text{Sym}_3 \times Z_5$ .

Alle weiteren Aussagen über die 3-Struktur von  $G$  in (1) folgen jetzt unmittelbar aus (6.10).

Wir wollen schließlich noch  $N := N_G(F)$  bestimmen. Da  $C_J(F) = F \times Q$  mit  $Q \cong E(2^3) \setminus L_3(2)$  ist und außerdem auch  $N \cap N_G(D) \cong \text{Sym}_3 \times D_{10}$  gilt, liefert das Frattini-Argument nun  $N/C_G(F) \cong Z_2$ . Ferner ist  $D \cdot \langle t \rangle$  ein Sylow 3-Normalisator von  $N \cap Q$ .

Wir können nunmehr o.B.d.A. annehmen, daß  $D = \langle a_1 \rangle$  ist. Also ist  $F \leq N_G(D) \leq H_0$ . Da 2-lokale Untergruppen von  $G$  11'-Gruppen sind, ist dann  $O_2(H) \cap G = E \cap G = \langle 1 \rangle$ . Wegen  $E(2^3) \cong O_2(Q) \leq C_E(F) \cong Q_8 * Q_8 \cong \text{Ex}(2^5)$  erhalten wir nun  $O_2(Q) \cap G = \langle 1 \rangle$ ; da  $Q$  nicht über  $O_2(Q)$  zerfällt, folgt schließlich  $C_G(F) = F \times D \cdot \langle t \rangle \cong Z_5 \times \text{Sym}_3$  und damit auch  $N \cong D_{10} \times \text{Sym}_3$ . Wir haben also sämtliche Aussagen im Falle (1) bewiesen.

Die Aussagen in den Fällen (2) und (4) ergeben sich nun trivialerweise aus der Tatsache, daß 2-lokale Untergruppen von  $G$  stets 11'-Gruppen sind und daß für jede Involution  $j$  aus  $N_J(P_0)$  stets  $C_{P_0}(j) \neq \langle 1 \rangle$  ist.

Wir betrachten abschließend noch den Fall, daß  $P \cong E(11^2)$  ist. Offensichtlich gilt dann  $C_G(P) = C_J(P) = P$ . Nach (3.18) gilt  $N_J(P)/P \cong Z_{11} \cdot [E(2^2) \times Z_5]$ . Da  $Z(P_0) \trianglelefteq N_J(P)$  ist, folgt mit (6.9) jetzt  $N_G(P)/P \leq Z_{10}$ ; dabei operieren die Involutionen aus  $N_G(P)$  invertierend auf  $P$ .

Wir nehmen nun an, daß  $N_G(P)/P \cong Z_2$  ist. Dann sind die Involutionen aus  $N_G(P)$  offensichtlich nicht-2-zentral in  $J$ . Mit (1.19) folgt jetzt, daß es in  $G$  genau eine Konjugiertenklasse von Involutionen gibt; nach (6.2) enthält  $G$  jedoch stets 2-zentrale Involutionen aus  $J$ . Mit diesem Widerspruch haben wir also gezeigt, daß  $N_G(P)/P \not\cong Z_2$  ist. Nun folgt die Behauptung im Falle (3) mit einem bekannten Theorem von Burnside.

Q.E.D.

(6.12) Lemma.  $11^2$  ist kein Teiler von  $|G|$ .

Beweis. Wir nehmen an, daß  $G$  eine Sylow 11-Untergruppe  $P$  hat mit  $E(11^2) \leq P \leq \text{Ex}(11^3)$ . Wir setzen  $N := N_G(P)$  und  $n := |G : N|$ .

Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $P \cong \text{Ex}(11^3)$  ist; nach (6.11) ist dann insbesondere  $N/P \leq Z_5$ . Mit (6.2) erhalten wir jetzt  $|G| = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot |N| \cdot m$ , wobei  $m$  ein Teiler von  $2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$  ist. Nach (3.18) ist ferner  $n = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot m \equiv 1 \pmod{|P|}$ ; es folgt  $m \equiv 481 \pmod{|P|}$ .

Ist 5 ein Teiler von  $m$ , so gilt  $m = 5 \cdot m_0$  mit  $m_0 \equiv 1161 \pmod{|P|}$ . Mittels der Tabelle 1 aus §A stellen wir nun leicht fest, daß ein solches  $m_0$  nicht existiert.

Es ist also  $\text{ggT}(5, m) = 1$  und  $m \equiv 481 \pmod{|P|}$ . Die möglichen Werte für  $m$  entnehmen wir jetzt wieder der Tabelle 1 aus §A; diese sind  $2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$ ,  $2^6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 37$ ,  $2^6 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$  und  $2^7 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 37$ .

Wir setzen  $n_0 := |N/P|$ ; dann ist  $n_0$  ein Teiler von 5 und für  $|G|$  haben wir die folgenden vier Möglichkeiten:

- (1)  $|G| = n_0 \cdot 2^{16} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$ ;
- (2)  $|G| = n_0 \cdot 2^{17} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 37$ ;
- (3)  $|G| = n_0 \cdot 2^{17} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$ ;
- (4)  $|G| = n_0 \cdot 2^{18} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 37$ .

Im Falle (3) ist  $|J : G| \leq 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240 < 1333$ ; dies ist jedoch unmöglich, da der kleinste Grad eines irreduziblen nichttrivialen komplexen Charakters von  $J$  genau 1333 ist. In den weiteren Fällen erhalten wir nun auch Widersprüche durch Anwendung eines bekannten Theorems von Sylow für die Primzahlen 31 und 37.

Wir haben bisher also gezeigt, daß  $P \cong E(11^2)$  und somit  $Z_5 \leq N/P \leq Z_{10}$  ist. Nach (6.2) erhalten wir ferner  $|G| = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot |N| \cdot m$  mit  $m \mid 2^{10} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$ . Nach (3.18) gilt auch  $n = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot m \equiv 1 \pmod{|P|}$  und somit  $m \equiv 115 \pmod{|P|}$ .

Mit Hilfe der Tabelle 2 aus §A bestimmen wir jetzt die möglichen Werte von  $m$ ; wir beachten dabei, daß wegen (6.2.h) aus  $43 \mid m$  stets auch  $7 \mid m$  folgt. Somit erhalten wir dann die folgenden Möglichkeiten für den Index  $n = |G : N|$ :

- (1)  $2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 43$  ;
- (2)  $2^{12} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 43$  ;
- (3)  $2^{13} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 31$  ;
- (4)  $2^{15} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 43$  ;
- (5)  $2^{16} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$  ;
- (6)  $2^{17} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$  ;
- (7)  $2^{17} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 43$  ;
- (8)  $2^{17} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 37$  ;
- (9)  $2^{18} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 37$  ;
- (10)  $2^{19} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43$  ;
- (11)  $2^{19} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 37$  ;
- (12)  $2^{20} \cdot 3^3 \cdot 23 \cdot 31$  ;
- (13)  $2^{20} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 29$  .

Wir beachten dabei, daß im Falle (1)  $N/P \cong Z_{10}$  und in den Fällen (12) und (13)  $N/P \cong Z_5$  ist.

Der Fall (6) scheidet sofort aus, da der Index  $|J : G|$  kleiner als 1333 ist und dieses in  $J$  unmöglich ist. In verbleibenden Fällen (1) - (12) erhalten wir nun stets einen

Widerspruch, indem wir Sylow's bekanntes Theorem anwenden für die Primteiler von  $|G|$ , welche in  $\{23, 29, 31, 37, 43\}$  enthalten sind.

Wir haben damit gezeigt, daß  $|G| = 2^{20} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 29$  ist; dabei ist  $N/P \cong Z_5$  und ein Sylow 29-Normalisator von  $G$  ist isomorph zu  $Z_{29} \cdot Z_4$ .

Mit  $\chi_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 62\}$ , bezeichnen wir die irreduziblen komplexen Charaktere von  $J$ ; dabei sei die Indizierung gemäß der Auflistung in der Charaktertafel von  $J$  aus (2.9) vorgenommen. Weiterhin übernehmen wir die Bezeichnung für Repräsentanten der Konjugiertenklassen von  $J$  aus (2.8).

Es sei nun  $\mu = (1_G)^J$  der nach  $J$  hochinduzierte 1-Charakter von  $G$ . Dann ist  $\mu$  bekanntlich eine Linearkombination der  $\chi_i$  mit nichtnegativen ganzen Koeffizienten. Da  $\mu(1) = |J : G| = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43 = 74869278$  ist und  $\chi_{21}(1) > \mu(1)$  gilt, erhalten wir dann offensichtlich  $\mu = c_1 \chi_1 + \dots + c_{20} \chi_{20}$  mit nichtnegativen ganzen Koeffizienten  $c_i$ . Wir wissen ferner, daß  $c_1 = 1$  ist; außerdem gilt  $c_i = c_j$ , falls  $\chi_i = \overline{\chi_j}$  ist. Schließlich sei noch vermerkt, daß  $\mu(x) = 0$  ist für Elemente  $x$  aus  $J$  mit  $ccl_J(x) \cap G = \emptyset$ .

Damit erhalten wir wegen  $o(x_{46}) = 33$  und  $o(x_{61}) = 66$  dann  $0 = \mu(x_{46}) = 1 - 2c_2 + 2c_4 + 2c_6 - 2c_9 - 2c_{14} - 2c_{17} + c_{19}$  sowie  $0 = \mu(x_{61}) = 1 + 2c_2 + 2c_4 + 2c_6 - 2c_9 + 2c_{17} + c_{19}$ . Also gilt  $0 = \mu(x_{61}) - \mu(x_{46}) = 4c_2 + 2c_{14} + 4c_{17}$  und somit  $c_2 = c_{14} = c_{17} = 0$ . Wegen  $o(x_{34}) = 22$  folgt jetzt  $0 = \mu(x_{34}) = 1 + 2c_4 + 2c_6 + 3c_8 + 4c_9 + 3c_{11} - 2c_{19}$  und damit  $0 = \mu(x_{34}) + 2\mu(x_{46}) = 3 + 6c_4 + 6c_6 + 3c_8 + 3c_{11}$ ; dies ist absurd.

Q.E.D

(6.13) Lemma. Es gilt  $|G| \neq 2^{16} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 37$  und  $|G| \neq 2^{17} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 37$ .

Beweis. Wir nehmen an, daß  $|G| = q \cdot 2^{16} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 37$  ist mit  $q \in \{1, 2\}$ . Da Betrachtungen der Sylow-Struktur von  $G$  nicht die gewünschten Widersprüche liefern, wollen wir ebenso wie im Beweis des vorhergehenden Lemmas Methoden der Charaktertheorie anwenden. Zuvor vermerken wir jedoch, daß ein Sylow 29-Normalisator von  $G$  die Ordnung  $29 \cdot 7 \cdot q$  und ein Sylow 37-Normalisator von  $G$  die Ordnung  $37 \cdot 3 \cdot q$  hat.

Es sei also  $\mu = (1_G)^J$  der nach  $J$  induzierte 1-Charakter. Ebenso wie im Beweis von (6.12) wollen wir die Bezeichnungen für die irreduziblen komplexen Charaktere und für die Repräsentanten der  $J$ -Konjugiertenklassen aus (2.8) sowie (2.9) übernehmen. Insbesondere gelten dann die folgenden Aussagen:

- (1)  $\mu = c_1 \chi_1 + \dots + c_{62} \chi_{62}$  mit nichtnegativen ganzen Zahlen  $c_i$ .
- (2)  $\mu(1) = |J : G| = r \cdot 2^h \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 43$  mit  $r \in \{1, 2\}$  und  $q \cdot r = 2$ .
- (3) Ist  $g \in J$  mit  $\text{cccl}_J(g) \cap G = \emptyset$ , so gilt  $\mu(g) = 0$ .
- (4) Ist  $P = \langle g \rangle \in \text{Syl}_p(G)$ , so gilt  $\mu(g) = |N_J(P) : N_G(P)|$ .
- (5) Es ist  $c_1 = 1$  und für  $\chi_i = \bar{\chi}_j$  gilt  $c_i = c_j$ .

Wir nehmen zunächst an, daß  $q = 2$  und  $r = 1$  ist. Dann gilt insbesondere  $\mu(1) = 652\,914\,064$  und somit auch  $c_i = 0$  für  $i \in \{31, \dots, 62\}$ . Da  $o(x_{43}) = 31$  und  $o(x_{57}) = 43$  ist, erhalten wir die folgenden Gleichungen:



$$\mu(x_{43}) = 1 - c_{11} = 0 \quad \text{und}$$

$$\mu(x_{57}) = 1 + 2c_4 + 2c_9 - c_{11} + 2c_{15} = 0 \quad .$$

Damit erhalten wir dann  $c_{11} = 1$  und  $c_4 = c_9 = c_{15} = 0$  .

Da  $o(x_{50}) = 37$  ist gilt dann außerdem

$$\mu(x_{50}) = 1 + 2c_2 + c_8 - 2c_{19} + 2c_{23} = 2 \quad .$$

Also gilt insbesondere  $1 \leq c_8 \equiv 1 \pmod{2}$  .

Wir beachten, daß  $o(x_{20}) = 11$  ist; also gilt

$$\begin{aligned} 0 = \mu(x_{20}) = & 4 + 4c_2 + 2c_6 + 3c_8 + 4c_{12} + 3c_{14} + 2c_{17} + \\ & c_{21} - 4c_{22} - 6c_{23} + c_{25} + 3c_{26} + c_{28} + 3c_{29} \\ & + 4c_{30} \quad . \end{aligned}$$

Ist nun  $c_{23} = 1$ , so folgt  $c_{22} = 1$  und damit dann

$0 = \mu(x_{20}) \geq 4 + 3c_8 - 6 \geq 1$ ; das ist aber unmöglich. Also gilt  $c_{23} = 0$  .

Da  $c_{22} \leq 2$  gilt sowie  $0 \geq 4 + 3c_8 - 4c_{22}$ , folgt jetzt  $c_8 = 1$ ,  $c_{22} = 2$  und  $c_j = 0$  für  $j \in \{2, 6, 12, 14, 17, 26, 29, 30\}$  sowie  $0 = \mu(x_{20}) = -1 + c_{21} + c_{25} + c_{28}$  .

Wegen  $c_{22} = 2$  gilt dann  $c_j = 0$  für  $j \geq 23$ ; also ist dann insbesondere  $c_{21} = 1$ . Aus  $\mu(x_{50}) = 2$  folgt ferner  $c_{19} = 0$ . Wir haben damit alle Koeffizienten  $c_i$  bestimmt. Es folgt nun  $\mu = X_1 + X_8 + X_{11} + X_{21} + 2X_{22}$ ; dies impliziert jetzt  $\mu(x_{62}) = -1$ . Da  $o(x_{62}) = 66$  ist, haben wir also einen Widerspruch erhalten. Es gilt also folgendes:

(6) Es ist  $q = 1$  und  $r = 2$ ; insbesondere gilt

$$\mu(1) = |J : G| = 1\,305\,828\,128 \quad \text{und}$$

$$c_j = 0 \quad \text{für } j \in \{33, 34, 36, 37, 38, 39\} \quad \text{und } j \geq 46 \quad .$$

$$\text{Ferner ist } c_{23} = c_{24} \leq 2, \quad c_{25} + \dots + c_{30} \leq 4$$

$$\text{und } c_{31} + \dots + c_{46} \leq 1 \quad .$$

Da  $0 = \mu(x_{57}) = 1 + 2c_4 + 2c_9 - c_{11} + 2c_{15} + c_{42}$  und  
 $0 = \mu(x_{43}) = 1 - c_{11} + c_{42}$  gilt, erhalten wir folgendes:

(7) Es ist  $c_j = 0$  für  $j \in \{4, 5, 9, 10, 15, 16\}$

und  $c_{11} = 1 + c_{42} \leq 2$ .

Wir werten nun  $\mu$  auf Elementen der Ordnung 23, 29, 37 und 11 aus und erhalten damit folgende Gleichungen:

$$(8) \quad 0 = \mu(x_{36}) = 1 - 2c_2 + 2c_6 + c_{14} - 2c_{23} + c_{25} + c_{26} - c_{27},$$

$$4 = \mu(x_{41}) = 1 - 2c_2 + 2c_6 - 2c_{12} - 2c_{19} + c_{21} - c_{27} + c_{32} - c_{41},$$

$$4 = \mu(x_{50}) = 1 + 2c_2 + c_8 - 2c_{19} + 2c_{23} - c_{43} - c_{44},$$

$$0 = \mu(x_{20}) = 1 + 4c_2 + 2c_6 + 3c_8 + 3c_{11} + 4c_{12} + 3c_{14} + 2c_{17} + \\ c_{21} - 4c_{22} - 6c_{23} + c_{25} + 3c_{26} + c_{28} + 3c_{29} + 4c_{30} - \\ c_{31} + 2c_{35} + 2c_{41} + 3c_{45}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen in (8) folgt außerdem

$$c_{21} = 4 + 2c_{12} + c_{14} + 2c_{19} - 2c_{23} + c_{25} + c_{26} - c_{32} + c_{41}.$$

Wir nehmen nun an, daß es ein  $j \geq 40$  gibt mit  $c_j \neq 0$ .  
 Dann gilt wegen  $\mu(1) - x_{40}(1) = 220\,223\,597$  offensichtlich  
 $c_i = 0$  für  $i \geq 22$  mit  $i \neq j$  sowie  $c_j = 1$ . Nun erhalten  
 wir den Widerspruch  $0 = \mu(x_{20}) \geq 1$ . Damit gilt dann

(9)  $c_j = 0$  für  $j \geq 36$ ,  $c_{11} = 1$  und  $1 \leq c_8 \equiv 1 \pmod{2}$ .

Wir nehmen jetzt an, daß  $j \in \{31, 32, 35\}$  ist mit  $c_j \neq 0$ .  
 Wegen  $\mu(1) - x_{31}(1) = 614\,988\,881$  ist dann  $c_j = 1$  sowie  
 $c_i = 0$  für  $j \neq i \geq 31$ ; außerdem gilt  $c_{23} = c_{24} \leq 1$ ,  
 $c_{22} \leq 2$  und  $c_{25} \leq 2$ .

Ist  $c_{23} = 0$ , so gilt  $c_{21} \geq 4 - c_{32} \geq 3$  und somit  
 $0 = \mu(x_{20}) \geq 1 + 3c_8 + 3c_{11} + c_{21} - 4c_{22} - c_{31} \geq 1$ ; dies ist  
 jedoch absurd. Damit gilt also  $c_{23} = c_{24} = 1$ .

Da  $\mu(1) - \chi_{31}(1) - 2\chi_{23}(1) = 95\,438\,801$  ist, folgt dann  $c_{22} = c_{25} = c_{26} = \dots = c_{30} = 0$  und  $c_{21} \geq 1$ ; damit gilt  $0 = \mu(x_{20}) \geq 4 + 3c_8 + c_{21} - 6c_{23} - c_{31} \geq 1$ , welches aber unmöglich ist.

Dieser Widerspruch liefert dann mit den Gleichungen aus (8) folgendes :

(10) Es gilt  $c_j = 0$  für  $j \geq 31$  und es gilt

$$c_{21} = 1 + 2c_2 + c_8 + 2c_{12} + c_{14} + c_{25} + c_{26} \geq 2.$$

Wir werten nun  $\mu$  noch auf Elementen der Ordnung 22, 33 und 66 aus; damit erhalten wir folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(x_{20}) - \mu(x_{35}) + \mu(x_{46}) - \mu(x_{61}) \\ &= 2c_6 + c_8 + 2c_{11} + 2c_{12} + c_{14} + c_{21} - 2c_{22} + 2c_{25} + c_{26} + c_{29} + 2c_{30}. \end{aligned}$$

Es folgt  $0 \geq c_8 + 2c_{11} + c_{21} - 2c_{22} \geq 5 - 2c_{22}$  und somit  $c_{22} \geq 3$ .

Nun berechnen wir  $m := \mu(1) - \chi_8(1) - \chi_{11}(1) - 2\chi_{21}(1) - 3\chi_{22}(1)$  und erhalten  $m = 421\,746\,538$ . Damit sehen wir nun leicht, daß  $c_{23} = c_{24} = c_{29} = c_{30} = 0$  ist. Dies wiederum impliziert dann  $c_{21} \geq 4$ . Wegen  $m - 2\chi_{21}(1) = 231\,170\,194$  folgt jetzt

(11)  $c_j = 0$  für  $j \geq 23$ .

Die ersten beiden Gleichungen aus (8) liefern nun  $1 \leq c_{14} \equiv 1 \pmod{2}$  und  $c_{21} \equiv 1 \pmod{2}$ ; also ist dann insbesondere  $c_{21} \geq 4 + c_{14} \geq 5$ .

Wegen  $m - 3\chi_{21}(1) - \chi_{14}(1) = 131\,591\,095$  folgt jetzt offensichtlich  $c_{22} = 3$  und  $c_{21} = 5$ . Damit erhalten wir nun  $0 = \mu(x_{20}) \geq 1 + 3c_8 + 3c_{11} + 3c_{14} + c_{21} - 4c_{22} \geq 3$ .

Wir haben somit einen endgültigen Widerspruch erhalten.

(6.14) Lemma. Entweder gilt  $|G| = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot g$  mit einem Teiler  $g$  von  $2^9 \cdot 3$  oder es liegt einer der in der folgenden Tabelle beschriebenen Fälle vor; dabei ist  $\alpha \nmid 2$ ,  $8 \nmid 4$  und  $S_p \in \text{Syl}_p(G)$  mit  $11 \leq p \in \Pi(G)$ .

| $ G $                                                    | $ N_G(S_p) $ , $11 \leq p \in \Pi(G)$ |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| $\alpha \cdot 2^{17} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 43$         | $43 \cdot 7 \cdot \alpha$             |
| $\alpha \cdot 2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 43$ | $43 \cdot 7 \cdot \alpha$             |
| $2^{18} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$     | $23 \cdot 11$ , $11 \cdot 10$         |
| $2^{20} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$              | $31 \cdot 5$                          |
| $\alpha \cdot 2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$ | $31 \cdot 5 \cdot \alpha$             |
| $2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31$     | $31 \cdot 5$ , $11 \cdot 10$          |
| $2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$              | $31 \cdot 10$                         |
| $\alpha \cdot 2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$ | $29 \cdot 7 \cdot \alpha$             |
| $\alpha \cdot 2^{18} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 29$         | $29 \cdot 7 \cdot \alpha$             |
| $2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$              | $29 \cdot 4$                          |
| $\alpha \cdot 2^{13} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 29$         | $29 \cdot 7 \cdot \alpha$             |
| $2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$     | $29 \cdot 4$ , $11 \cdot 5$           |
| $2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 37$             | $37 \cdot 4$ , $11 \cdot 10$          |
| $8 \cdot 2^{14} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 37$              | $37 \cdot 3 \cdot 8$                  |
| $2^{13} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 37$              | $37 \cdot 4$                          |
| $\alpha \cdot 2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ | $11 \cdot 5 \cdot \alpha$             |
| $\alpha \cdot 2^{17} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ | $11 \cdot 5 \cdot \alpha$             |
| $\alpha \cdot 2^{16} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$         | $11 \cdot 5 \cdot \alpha$             |
| $\alpha \cdot 2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$         | $11 \cdot 5 \cdot \alpha$             |

Beweis. Nach (4.5) ist  $|\Pi(G)| \geq 4$ . Wir setzen nun  $\Pi_0 = \{11, 23, 29, 31, 37, 43\}$ . Gilt  $\Pi(G) \cap \Pi_0 = \emptyset$ , so folgt aus (6.2.a) trivialerweise  $|G| = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot g$  mit einem Teiler  $g$  von  $2^9 \cdot 3$ .

Wir betrachten im folgenden also den Fall, daß es ein  $p \in \Pi(G) \cap \Pi_0$  gibt. Die in der Tabelle aufgelisteten Fälle verifiziert man leicht mit den bekannten Theoremen von Sylow. Wir nehmen daher o.B.d.A. an, daß  $|G|$  nicht in der Tabelle aufgelistet ist. Ferner sei  $P \in \text{Syl}_p(G)$  und  $N = N_G(P)$ .

Wir nehmen zunächst an, daß  $p = 43$  ist. Offensichtlich ist dann  $P \cong Z_{43}$  und nach (6.2.h) gilt  $|N| = 43 \cdot 7 \cdot n$  mit  $n \in \{1, 2\}$ . Also gilt  $|G| = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 43 \cdot n \cdot m$ , wobei  $m$  ein Teiler von  $2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$  ist. Da  $|G : N| \equiv 1 \pmod{43}$  ist, folgt dann  $m \equiv 40 \pmod{43}$ . Wir bestimmen nun mittels der Tabelle 3 aus §A die möglichen Werte von  $m$ ; wir geben diese Werte der Vollständigkeit halber an, vermerken jedoch zu jedem Wert eine Primzahl  $q$  derart, daß wir durch Betrachtung eines Sylow  $q$ -Normalisators in  $G$  einen Widerspruch erhalten:  $2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$  [ $q = 23$ ],  $2^6 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37$  [ $23$ ],  $2^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 37$  [ $23$ ],  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 37$  [ $23$ ],  $3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31$  [ $23$ ],  $2^{10} \cdot 11 \cdot 23$  [ $23$ ],  $2^6 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29$  [ $23$ ],  $2^{10} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29$  [ $23$ ];  $2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37$  [ $31$ ],  $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 37$  [ $31$ ],  $2^0 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 31$  [ $31$ ],  $2^8 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31$  [ $31$ ];  $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 37$  [ $29$ ],  $2^9 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 37$  [ $29$ ],  $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$  [ $29$ ],  $2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29$  [ $29$ ];  $2 \cdot 11 \cdot 37$  [ $37$ ];  $2^9 \cdot 3 \cdot 11$  [ $11$ ] und  $2^5 \cdot 5 \cdot 11$  [ $11$ ].

Wir weisen an dieser Stelle darauf hin, daß wir bei der Bestimmung der möglichen Werte von  $m$  die Tatsache benutzt haben, daß aus  $23|m$  stets  $11|m$  und aus  $31|m$  stets  $5|m$  folgt.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß  $43 \nmid \Pi(G)$  und  $p = 23$  ist. Offensichtlich ist dann  $P \cong Z_{23}$  sowie  $N/P \cong Z_{11}$ . Also gilt  $|G| = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot m$  mit einem Teiler  $m$  von  $2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$ . Mit einem Theorem von Sylow folgt ferner  $m \equiv 18 \pmod{23}$ . Wir bestimmen die möglichen Werte von  $m$  nun mittels der Tabelle 4 aus §A und verfahren wie im vorhergehenden Fall ( $p = 43$ ):  $3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 37$  [29],  $3 \cdot 7 \cdot 37$  [37],  $3 \cdot 29$  [29],  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$  [29],  $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 37$  [29],  $2^3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 37$  [31],  $2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$  [31],  $2^5 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$  [29],  $2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 37$  [31],  $2^6 \cdot 5 \cdot 37$  [37],  $2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 31$  [31],  $2^6$  [11],  $2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$  [31],  $2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$  [31],  $2^8 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 37$  [29],  $2^8 \cdot 7 \cdot 37$  [37],  $2^8 \cdot 29$  [29],  $2^9 \cdot 3$  [11],  $2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37$  [37],  $2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 31$  [29],  $2^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$  [29].

Wir betrachten nun den Fall, daß  $p = 31$  ist und daß  $\{43, 23\} \cap \Pi(G) = \emptyset$  ist. Dann gilt  $P \cong Z_{31}$  und außerdem  $|N| = 31 \cdot 5 \cdot n$  mit  $n \in \{1, 2\}$ ; insbesondere gilt somit also  $|G| = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 31 \cdot n \cdot m$  mit  $m \mid 2^{10} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 37$  sowie  $m \equiv 7 \pmod{31}$ . Wir bestimmen  $m$  mittels der Tabelle 5 aus §A; zu Widersprüchen führen die folgenden Möglichkeiten für  $m$ :  $3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 37$  [29],  $2 \cdot 29 \cdot 37$  [29],  $2^2 \cdot 3 \cdot 29$  [29],  $2^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37$  [37],  $2^5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 37$  [29],  $2^6 \cdot 29 \cdot 37$  [29],  $2^7 \cdot 3 \cdot 29$  [29],  $2^8 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37$  [37],  $2^9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$  [11],  $2^{10} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 37$  [29].

Damit erhalten wir schließlich  $m = 2^9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ . Ist  $n = 1$ , so ist  $|G|$  in der Tabelle des Lemmas aufgelistet; im Falle  $n = 2$  liefert die Betrachtung eines Sylow 11-Normalisators in  $G$  einen Widerspruch.

Es sei nun also  $p = 29$  und  $\Pi(G) \cap \{43, 31, 23\} = \emptyset$ . Somit gilt  $P \cong Z_{29}$ ; nach (6.2.h) ist ferner  $N/P$  isomorph zu  $Z_4$ ,  $Z_7$ ,  $Z_{14}$  oder  $Z_{28}$ . Offensichtlich gilt dann also  $|G| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot |N| \cdot m$ , wobei  $m \mid 2^{11} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37$  und ferner  $m \equiv 19 \pmod{29}$  ist.

Wir beachten, daß aus  $11 \mid m$  und  $5 \nmid m$  wegen (1.19), (3.19) und (3.31) dann  $G \cap \text{cccl}_J(w_1) = \emptyset$ ,  $N/P \cong Z_7$  und  $|G|_2 \leq 2^{12}$  folgt.

Wir nehmen zunächst an, daß 7 ein Teiler von  $m$  ist. Dann gilt insbesondere  $N/P \cong Z_4$  und  $m = 7 \cdot m_0$ , wobei  $m_0 \mid 2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37$  sowie  $m_0 \equiv 11 \pmod{29}$  ist. Mit Hilfe der Tabelle 6 aus §A bestimmen wir jetzt  $m_0$ . Wie in den vorhergehenden Fällen erhalten wir Widersprüche für alle möglichen Werte von  $m_0$ :  $5 \cdot 37$  [37],  $2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 37$  [11] und  $2^6 \cdot 5 \cdot 11$  [11].

Wir haben also gezeigt, daß  $m$  ein Teiler von  $2^{11} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 37$  ist. Ähnlich wie in den obigen Fällen erhalten wir durch Betrachtung eines Sylow 37-Normalisators von  $G$  einen Widerspruch für die folgenden Werte von  $m$ :  $2 \cdot 3 \cdot 37$ ,  $2^6 \cdot 37$  und  $2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 37$ .

Ist  $m = 2^4 \cdot 3$ , so folgt wegen  $|\Pi(G)| \geq 4$  dann sofort  $|N| = 29 \cdot 7 \cdot n$  mit  $n \nmid 4$ ; also gilt  $|G| = n \cdot 2^{13} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 29$ . Da für  $n \nmid 2$  die Ordnung von  $G$  in der Tabelle des Lemmas auftritt, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $n = 4$  ist.

Ist  $X \in \text{Syl}_7(G)$  und  $Y = N_G(X)$ , so ist offensichtlich  $Y/X$  isomorph zu  $Z_4$ ,  $D_8$  oder  $\text{Sym}_4$ . Nun liefert ein Theorem von Sylow einen Widerspruch.

Ist  $m = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37$ , so liefert die Betrachtung eines Sylow 37-Normalisators zusammen mit (6.12) dann zunächst  $|G| = 2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 37$  und  $N/P \cong Z_{28}$ . Jetzt sehen wir leicht, daß ein Sylow 7-Normalisator von  $G$  isomorph zu  $F_{21} \times F_{20}$  ist; dies führt nun jedoch mit einem Sylow-Argument für die Primzahl 5 zu einem Widerspruch.

Ist  $m = 2^9$ , so folgt wegen  $|\Pi(G)| \geq 4$  dann zunächst  $|N| = 29 \cdot 7 \cdot n$  mit  $n|4$  und somit  $|G| = n \cdot 2^{18} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 29$ . Für  $n \leq 2$  finden wir  $|G|$  in der Tabelle des Lemmas und für  $n = 4$  liefern Sylow-Argumente für die Primzahl 7 einen Widerspruch.

Mit Hilfe der Tabelle 6 aus §A sehen wir nun leicht, daß  $m = 2^{10} \cdot 3 \cdot 5$  und somit  $|G| = 2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot |N|$  gilt. Da  $|G|_2 \leq 2^{20}$  ist, folgt dann offensichtlich  $N/P \cong Z_7$  oder  $N/P \cong Z_{14}$ ; in beiden Fällen finden wir  $|G|$  in der Tabelle des Lemmas.

Wir können im folgenden also o.B.d.A. annehmen, daß  $\Pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 37\}$  ist.

Es sei nun  $p = 37$ . Somit ist  $P \cong Z_{37}$  und  $N/P$  ist isomorph zu  $Z_4$ ,  $Z_3$ ,  $Z_6$  oder  $Z_{12}$ . Damit gilt dann  $|G| = 2^9 \cdot 3 \cdot |N| \cdot m$ , wobei  $m | 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$  und außerdem  $m \equiv 2 \pmod{37}$  ist.

Wie oben folgt aus  $11|m$  und  $5 \nmid m$  auch in diesem Fall  $G \cap \text{cccl}_3(w_1) = \emptyset$ ,  $|G|_2 \leq 2^{12}$  sowie  $N/P \cong Z_3$ .



Wir betrachten zunächst den Fall, daß 9 ein Teiler von  $m$  ist. Offensichtlich gilt dann  $N/P \cong Z_4$  sowie  $m = 9 \cdot m_0$  mit  $m_0 \mid 2^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$  und  $m_0 \equiv 29 \pmod{37}$ . Mit Hilfe der Tabelle 7 aus §A sehen wir nun leicht, daß  $m_0 \in \{2^2 \cdot 5 \cdot 7, 2^4 \cdot 5 \cdot 11, 2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11\}$  ist. In den ersten beiden Fällen finden wir  $|G|$  in der Tabelle des Lemmas und können damit also  $m_0 = 2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$  annehmen. Nun erhalten wir jedoch mit einem Sylow-Argument für die Primzahl 11 einen Widerspruch.

Es sei nun  $m = 3 \cdot m_0$  mit  $m_0 \mid 2^{11} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ . Dann ist  $m_0 \equiv 13 \pmod{37}$  und mit Tabelle 7 aus §A sehen wir nun leicht, daß  $m_0 = 2^{11}$  ist. Damit folgt schließlich der Widerspruch  $\Pi(G) \subseteq \{2, 3, 37\}$ .

Es gilt also  $m \mid 2^{11} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$  und  $m \equiv 2 \pmod{37}$ . Da  $|\Pi(G)| \geq 4$  ist, sehen wir jetzt mittels der Tabelle 7 aus §A leicht, daß  $m = 2^5 \cdot 7$  ist. Damit gilt also  $|G| = 2^{14} \cdot 3 \cdot 7 \cdot |N|$ ; insbesondere ist dann  $Z_3 \leq N/P \leq Z_{12}$ . Dieser Fall ist jedoch in der Tabelle des Lemmas beschrieben.

Wir haben bisher also gezeigt, daß  $p = 11$  und außerdem  $G$  eine  $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ -Gruppe ist. Offensichtlich ist dann  $P \cong Z_{11}$  und  $N/P$  ist isomorph zu  $\text{Sym}_3 \times Z_5$ ,  $Z_2$ ,  $Z_5$  oder  $Z_{10}$ ; nach (6.2.i) folgt jetzt aber auch  $N/P \neq Z_2$ . Also ist  $Z_5 \leq N/P$  und  $|G| = 2^{10} \cdot 3 \cdot |N| \cdot m$ , wobei  $m \mid 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7$  und  $m \equiv 4 \pmod{11}$  ist.

Ist  $N/P \cong \text{Sym}_3 \times Z_5$ , so ist nach (6.11) ein Sylow 5-Normalisator von  $G$  isomorph zu  $D_{10} \times \text{Sym}_3$ ; damit folgt dann  $m \equiv 1 \pmod{5}$ . Das ist aber unmöglich, denn wir haben bereits gezeigt, daß  $m \equiv 4 \pmod{11}$  ist.

Es gilt also  $Z_5 \leq N/P \leq Z_{10}$ . Insbesondere gilt dann  $|G| = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot |N| \cdot m_0$  mit  $m_0 \mid 2^{10} \cdot 3 \cdot 7$  und  $m_0 \equiv 5 \pmod{11}$ .

Nun verifizieren wir mit einfachen Rechnungen, daß

$m_0 \in \{2^4, 2^6 \cdot 3, 2^7 \cdot 7, 2^9 \cdot 3 \cdot 7\}$  ist. Diese Fälle sind jedoch bereits alle in der Tabelle des Lemmas erfaßt.

Wir haben somit schließlich sämtliche Behauptungen des Lemmas bewiesen.

Q.E.D.

(6.15) Lemma. In 2-lokalen Untergruppen von  $G$  gibt es keine Sektionen isomorph zu  $Z_5 \times Z_7$ .

Beweis. Wir nehmen an, daß  $N$  eine 2-lokale Untergruppe von  $G$  ist, welche eine Sektion isomorph zu  $Z_5 \times Z_7$  involviert. Nach (5.1) können wir dann ferner o.B.d.A. annehmen, daß  $N \leq K = N_J(R) \cong \text{Spec}(2^{15}) \setminus [\text{Sym}_5 \times L_3(2)]$  ist. Somit gibt es also offensichtlich Untergruppen  $X$  und  $Y$  in  $N$  mit  $Z_5 \cong X \in \text{Syl}_5(N)$  und  $Z_7 \cong Y \in \text{Syl}_7(N)$  und  $[X, Y] = \langle 1 \rangle$ . Da  $X \times Y$  irreduzibel auf  $R/Z(R)$  operiert und da außerdem  $N$  2-constrained ist, folgt offensichtlich  $O_2(N) = R$ . Mit (5.15) erhalten wir ferner  $|N|_2 = |G|_2$ . Wir wissen, daß  $K$  für  $p \in \{5, 7\}$  einen Sylow  $p$ -Normalisator von  $J$  enthält; also enthält auch  $N = K \cap G$  einen Sylow  $p$ -Normalisator von  $G$ . Somit gilt also  $|G : N| \equiv 1 \pmod{q}$  für  $q \in \{2, 5, 7\}$ .

Aus der Einfachheit von  $G$  folgt offensichtlich  $D_{10} \times F_{21} \leq N/R \leq K/R \cong \text{Sym}_5 \times L_3(2)$ . Da  $|N|_2 \leq 2^{20}$  gilt, ist  $N/R$  dann isomorph zu einer der folgenden Gruppen:  
 $D_{10} \times F_{21}$ ,  $F_{20} \times F_{21}$ ,  $\text{Alt}_5 \times F_{21}$ ,  $\text{Sym}_5 \times F_{21}$ ,  
 $D_{10} \times L_3(2)$ ,  $F_{20} \times L_3(2)$  oder  $\text{Alt}_5 \times L_3(2)$ .

Wir haben damit die möglichen Ordnungen der Gruppe  $N$  bestimmt. Eine Inspektion der möglichen Ordnungen von  $G$  in (6.14) liefert nun zusammen mit einem Theorem von Sylow in allen Fällen stets einen Widerspruch. Wir haben damit das Lemma bewiesen.

Q.E.D.

(6.16) Lemma. Ist  $N$  eine 2-lokale Untergruppe von  $G$ , welche eine Sektion isomorph zu  $\text{Alt}_6$  involviert, so ist  $N$  in  $J$  nicht zu einer Untergruppe von  $H$  konjugiert.

Beweis. Wir nehmen an, daß  $N$  eine 2-lokale Untergruppe von  $G$  ist, welche eine Sektion isomorph zu  $\text{Alt}_6$  involviert und welche in  $H$  enthalten ist. Wir setzen  $Q := O_2(N)$  sowie  $\bar{H} := H/\langle u_1 \rangle$  und  $\bar{H} := H/E$ .

Da  $\bar{H} \cong \hat{\text{Aut}}(M_{22})$  ist, enthält  $N$  offensichtlich eine Sektion isomorph zu  $\hat{\text{Alt}}_6$ . Da  $O_{2,3}(H) = E \cdot \langle a_1 \rangle$  ist, können wir ferner o.B.d.A. annehmen, daß  $O_{2,3}(N) = Q \cdot \langle a_1 \rangle$  ist; insbesondere ist dann  $N = QN_0$  mit  $N_0 := N_G(\langle a_1 \rangle)$ . Außerdem ist nun klar, daß  $N = (Q \cap E) N_0$  ist mit  $N_0 \cap Q \cap E \leq \langle u_1 \rangle$ .

Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $Q$  nicht in  $E$  enthalten ist. Dann ist also  $\bar{Q} \neq \langle 1 \rangle$  eine 2-Gruppe derart, daß  $N_{\bar{H}}(\bar{Q})$  eine Sektion isomorph zu  $\hat{\text{Alt}}_6$  involviert. Eine Inspektion der maximalen Untergruppen von  $\text{Aut}(M_{22})$  liefert dann  $E(2^4) \cdot \hat{\text{Alt}}_6 \leq \tilde{N} = \tilde{N}_0 \leq E(2^4) \cdot \hat{\text{Sym}}_6$ . Da es in  $\text{Aut}(M_{22})$  genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen gibt, welche zu  $E(2^4) \cdot \text{Alt}_6$  isomorph sind und da  $(H \cap M)/E \cong E(2^4) \cdot \hat{\text{Sym}}_6$  ist mit  $O_2(H \cap M) = E * P$ , wobei  $P := \langle u_1, u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, s \rangle$  in  $C_H(a_1)$  enthalten ist, können wir dann also o.B.d.A. annehmen, daß  $P = O_2(N_0)$  und somit  $Q = (Q \cap E) * P$  ist. Da  $N$  2-constrained ist und  $O(N) = \langle 1 \rangle$  gilt, ist ferner  $\langle u_1 \rangle < Q \cap E$ . Wir wissen bereits, daß für  $x \in P - \langle u_1 \rangle$   $u_1 x$  in  $J$  nicht zu  $x$  konjugiert ist; damit gilt dann  $C_E(P \bmod \langle u_1 \rangle) = C_E(P) = U \cap E \cong E(2^7)$ . Da  $N_0$  irreduzibel auf  $(U \cap E)/\langle u_1 \rangle$  operiert, erhalten wir  $U \cap E \leq Q \cap E$  und

somit  $U = (U \cap E)P \leq Q$ . Dann ist offensichtlich  $U$  eine charakteristische Untergruppe von  $Q$  und damit  $N \leq N_G(U)$ ; dies widerspricht jedoch den Aussagen in (6.8). Wir haben also gezeigt, daß  $Q \leq E$  ist.

Da  $N > N_0$  ist, gilt insbesondere  $Q \neq \langle u_1 \rangle$ . Nach (6.2.f) ist  $Q$  nicht extraspeziell. Da  $\langle a_1 \rangle$  fixpunktfrei auf  $E - \langle u_1 \rangle$  operiert und da  $\hat{3}\text{Alt}_6$  nicht in  $\text{GL}_5(2)$  involviert ist, erhalten wir schließlich, daß  $Q$  elementarabelsch ist mit  $E(2^6) \leq Q \leq E(2^7)$  und  $\bar{Q} \cong E(2^6)$ .

Wir beachten nun, daß Gruppen vom Isomorphietyp  $\hat{3}\text{Alt}_7$  nicht in  $\text{GL}_6(2)$  involviert sind. Da  $H'/E$  irreduzibel auf  $E/Z(E)$  operiert, liefert eine Inspektion der maximalen Untergruppen von  $\text{Aut}(M_{22})$  nun im wesentlichen den Isomorphietyp von  $N/Q$ ; entweder ist  $\hat{3}\text{Alt}_6 \leq N/Q \leq \hat{3}\text{Aut}(\text{Alt}_6)$  oder es gilt  $\hat{3}\text{L}_3(4) \leq N/Q \leq \hat{3}\text{L}_3(4) \cdot Z_2$ .

Wir nehmen jetzt an, daß  $\hat{3}\text{L}_3(4) \leq N/Q \leq \hat{3}\text{L}_3(4) \cdot Z_2$  gilt. Mit (6.3) sehen wir nun leicht, daß  $N_0' \cong \hat{6}\text{L}_3(4)$  ist und somit auch  $\langle u_1 \rangle \leq Q \cong E(2^7)$  gilt. Offensichtlich ist  $Q_0 := [Q, \langle a_1 \rangle] \cong E(2^6)$  auch ein Normalteiler von  $N$ ; ferner gilt  $N = Q_0 \cdot N_0$ . Dem Beweis von (6.3) entnehmen wir jetzt, daß o.B.d.A.  $Q_0 = \langle u_2, u_4, u_1 u_5 v_1 r_0, u_3 u_5 v_2 r_2, r_0 r_1 r_2, r_0 r_3 \rangle$  und  $X_0 := \langle u_1, u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, s, d_2, s_2 \rangle \in \text{Syl}_2(N_0')$  sowie  $N_0' \not\leq N_0 \not\leq N_0' \cdot \langle t_1 t_2 \rangle$  ist.

Wir setzen nun  $X_1 := X_0 \cdot \langle t_1 t_2 \rangle$ ,  $Y_0 := Q_0 \cdot X_0$  sowie  $Y_1 := Q_0 \cdot X_1$ ; ferner sei  $Y \in \text{Syl}_2(N)$  mit  $Y_0 \leq Y \leq Y_1$ . Mit den Relationen aus (3.2) - (3.4) berechnen wir jetzt  $(Y_1)' = \langle u_1, u_2, u_4, u_5 v_1 r_0, u_3 u_5 v_2 r_2, r_0 r_1 r_2, u_6, v_3 d_2, v_4 t_2, d_2 \rangle$

und  $Z((Y_1)') = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle = Z(Y_0)$ ; da  $[u_4, t_1 t_2] = u_2$  ist, folgt dann  $C_{Y_1}(Z(Y_0)) = Y_0$ . Wir haben damit gezeigt, daß  $Y_0$  eine charakteristische Untergruppe von  $Y_1$  ist. Da  $Y \in \{Y_0, Y_1\}$  ist, ist  $Y_0$  auch charakteristisch in  $Y$ ; insbesondere gilt dann  $N_G(Y) \leq N_G(Y_0)$ .

Wir wollen jetzt die Gruppe  $D := N_G(Y_0)$  bestimmen. Wir wissen, daß  $Z := Z(Y_0) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$  ist. Mit den Relationen aus (3.2) - (3.4) berechnen wir jetzt außerdem, daß  $(Y_0)' = Z \cdot \langle u_5 v_1 r_0, u_3 u_5 v_2 r_2, u_6, v_3 d_2 \rangle$  ist; ferner gilt  $C_0 := C_{Y_0}(Y_0') = (Y_0)' \cdot \langle v_4 t_2, s \rangle = Y \cap U \cong E(2^9)$ . Da  $Y \leq S$  ist, sehen wir mit (5.3) nun leicht, daß  $C_0$  die einzige  $E(2^9)$ -Untergruppe von  $Y_0$  ist. Wegen  $C_J(C_0) = U$  folgt somit schließlich  $D \leq N_J(U) \cap N_J(Z) = M \cap K$ . Wir haben bereits im Beweis von (6.8) festgestellt, daß die Gruppe  $L_3 := \langle q_2, a_1, d_2 t_1 \rangle$  isomorph zu  $L_3(2)$  ist und daß  $M \cap K = UR_2 \cdot [L_3 \times \langle a_6, t_2 \rangle]$  ist. Wir beachten nun, daß  $Y_0 = C_0 \cdot \langle r_0 r_1 r_2, r_0 r_3, d_2, s_2 \rangle \leq UR_2 = R \cdot \langle v_4 t_2, s \rangle$  ist. Wegen  $U = C_0 \cdot \langle u_3, u_5 \rangle$  mit  $\langle u_3, u_5 \rangle \leq R$  und  $R' = Z$  folgt offensichtlich  $U \leq D$ . Da  $[s, r_0] = v_1 r_0 \notin Y_0$  und  $[s, r_2] = v_2 r_2 \notin Y_0$  ist, erhalten wir schließlich  $D \cap UR_2 = Y_0 \cdot \langle u_3, u_5 \rangle = UY_0$ .

Wir setzen jetzt  $L_4 := \langle r_0, r_2, d_2 \rangle \cdot L_3 = \langle r_0, r_2, d_2 \rangle \cdot L_2$ . Dann gilt  $UY_0 \cdot \langle a_1, t_1 t_2 \rangle \leq D \leq UY_0(L_4 \cdot \langle a_6, t_1 t_2 \rangle)$  und somit  $D \cap (UY_0 L_4) = UY_0(D \cap L_4)$ . Da  $D \cap O_2(L_4) = \langle d_2 \rangle$  ist, berechnen wir  $C_{L_2}(d_2) = \langle e_1, e_2, a_1, t_1 \rangle$  mit  $e_1 = j_2 t_1 \cdot r_1 t_1$  und  $e_2 = (e_1)^{a_1}$ . Da  $[s, e_1] = u_1 u_2 u_6 w_1 \notin Y_0$  ist, folgt wegen  $a_1 \in D$  offensichtlich  $D \cap L_4 \leq \langle d_2, a_1, t_1 \rangle$ . Mit  $u_5 v_1 r_0 \in Y_0$  und  $[u_5 v_1 r_0, t_1] = u_1 u_2 u_3 \notin Y_0$  erhalten wir

dann  $D \cap L_4 = \langle d_2, a_1 \rangle$ . Somit ist  $UY_0(D \cap L_4) = UY_0 \cdot \langle a_1 \rangle$  eine normale Untergruppe von  $D$ . Das Frattini-Argument liefert jetzt  $D \leq UY_0 N_0 \leq H \cap G = N$ .

Wir haben gezeigt, daß  $N_G(Y) \leq N_G(Y_0) \leq N$  ist. Somit ist insbesondere  $Y \in \text{Syl}_2(G)$  und  $|G|_2 = |N|_2$ .

Es sei nun  $F \in \text{Syl}_7(N)$ . Wir können o.B.d.A. annehmen, daß  $C_N(F) = F \times \langle u_1, a_1 \rangle$  ist; ferner gilt  $N_N(F)/C_N(F) \cong Z_3$ . Somit enthält  $N$  offensichtlich einen Sylow 7-Normalisator von  $G$ . Ferner ist klar, daß  $N$  einen Sylow 3-Normalisator von  $G$  enthält. Damit gilt also  $|G : N| \equiv 1 \pmod p$  für  $p \in \{2, 3, 7\}$  sowie  $|N| \in \{2^{13} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7, 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7\}$ . Jetzt verifizieren wir mit Hilfe der Liste in (6.14) leicht, daß wir einen Widerspruch erhalten haben.

Wir haben bisher also gezeigt, daß  $Q \leq E$  ist mit  $E(2^6) \leq Q \leq E(2^7)$  und  $\bar{Q} \cong E(2^6)$ ; außerdem gilt  $\hat{3}\text{Alt}_6 \leq N/Q \leq \hat{3}\text{Aut}(\text{Alt}_6)$ .

Offensichtlich operiert  $(\bar{N}_0)' \cong \hat{3}\text{Alt}_6$  irreduzibel auf  $\bar{Q}$  mit  $((\bar{N}_0)' \# \bar{Q}) = 45 \bar{v} + 18 \bar{w}$  und  $C_{(\bar{N}_0)', (\bar{w})} \cong \text{Alt}_5$ . Ist  $\text{Alt}_5 \cong X \leq Y \cong \text{Aut}(M_{22})$ , so gilt  $C_Y(X) = \langle 1 \rangle$  und damit  $N_Y(X) \leq \text{Sym}_5$ . Also gilt  $C_{\bar{N}_0}'(\bar{w}) \leq \text{Sym}_5$  und somit  $|\bar{N}_0 : (\bar{N}_0)'| \leq 2$ . Ist  $C_{\bar{N}_0}'(\bar{w}) \cong \text{Sym}_5$ , so gilt  $\bar{N}_0 \cong \hat{3}\text{Sym}_6$ , denn  $\text{PGL}_2(9)$  hat einen Sylow 5-Normalisator isomorph zu  $Z_2 \times D_{10}$  und  $M_{10}$  hat eine Sylow 2-Untergruppe  $X \cong \text{SD}_{16}$  mit  $D_8 = \Omega_1(X) \leq (M_{10})' = \text{Alt}_6$ . Wir haben also gezeigt, daß  $\hat{3}\text{Alt}_6 \leq N/Q \leq \hat{3}\text{Sym}_6$  ist.

Wir nehmen nun an, daß  $Q \cong E(2^6)$  ist. Ist  $X$  eine 2-lokale Untergruppe von  $G$  mit  $N' \leq X$ , so folgt wegen  $C_G(Q) = Q$  und  $\langle 1 \rangle \neq C_{O_2(X)}(Q) \leq O_2(X) \cap Q$  dann offensichtlich  $Q \leq O_2(X)$  und somit auch  $Z(O_2(X)) \leq Q$ ; also gilt  $Q = Z(O_2(X))$  und  $X = N$ . Jetzt folgt aus Theorem B in [29] unmittelbar der Widerspruch  $G \cong M_{24}$ . Es gilt also  $\langle u_1 \rangle \leq Q \cong E(2^7)$ .

Wir nehmen nun an, daß  $|N|_2 = |G|_2$  ist. Da  $2^{11} \mid |G|$  gilt, folgt offensichtlich  $N/Q \cong 3\text{Sym}_6$ . Weiterhin ist klar, daß  $N$  einen Sylow 3-Normalisator von  $G$  enthält. Somit gilt also  $|G : N| \equiv 1 \pmod{6}$ .

Es sei nun  $F \in \text{Syl}_5(N_O)$ . Dann ist  $F \in \text{Syl}_5(G)$  und  $\langle a_1 \rangle \in \text{Syl}_3(C_G(F))$  sowie  $\langle u_1 \rangle \leq C_Q(F) \cong E(2^3)$ . Wegen  $\langle u_1 \rangle \leq O_2(C_J(F))$  gilt dann  $O_2(C_G(F)) \neq \langle 1 \rangle$ . Nach (6.15) enthalten 2-lokale Untergruppen von  $G$  keine Sektionen isomorph zu  $Z_5 \times Z_7$ ; also ist  $7 \nmid |C_G(F)|$ . Wir beachten ferner, daß  $C_N(F) = C_Q(F) \cdot \langle a_1 \rangle \times F$  und  $N_N(F)/C_N(F) \cong Z_4$  ist. Wegen  $N_O \cap C_G(F) = \langle u_1, a_1 \rangle \times F$  enthält  $C := C_G(F)$  dann offensichtlich ein normales 3'-Komplement; also gilt  $C = O_2(C) \cdot \langle a_1 \rangle$  mit  $C_Q(F) \leq O_2(C)$  und  $|O_2(C)| \in \{2^3, 2^5\}$ . Damit erhalten wir nun  $|G : N| \equiv |N_G(F) : N_N(F)| \equiv \pm 1 \pmod{5}$ .

Wir haben also gezeigt, daß  $|N| = 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5$  gilt sowie  $|G : N| \equiv \pm 1 \pmod{30}$ . Jetzt verifizieren wir mit Hilfe der Liste in (6.14) leicht, daß dies jedoch unmöglich ist. Damit gilt also  $|N|_2 < |G|_2$ .

Es sei nun  $Y_O \in \text{Syl}_2(QN')$  und  $Y_1 \in \text{Syl}_2(N)$  mit  $Q \not\leq Y_O \not\leq Y_1$ . Ferner sei  $x \in N_G(Y_1)$  mit  $|Y_1 \langle x \rangle : Y_1| = 2$ . Dann ist offensichtlich  $P := Q^x \neq Q$  und  $P \not\leq Y_1$ .



Es sei nun  $i_0 \in QN' - Q$  mit  $(i_0)^2 \in Q$  und - falls  $N/Q \cong \mathfrak{S}ym_6$  ist -  $i_1 \in N - QN'$  mit  $(i_1)^2 \in Q$ . Da  $\langle a_1 \rangle$  fixpunktfrei auf  $Q - \langle u_1 \rangle$  operiert, folgt  $C_Q(i_0) \cong E(2^5)$  und  $C_Q(i_1) \cong E(2^4)$ ; ist  $[i_0, i_1] \in Q$ , so gilt außerdem  $C_Q(i_0, i_1) \cong E(2^3)$ . Damit erhalten wir schließlich  $QP \not\cong Y_1$  und  $Q \cap P = C_Q(P) \cong E(2^5)$  sowie  $QP/Q \cong E(2^2)$ .

Offensichtlich existieren Elemente  $f$  und  $t$  in  $(N_O)'$  derart, daß  $F := \langle a_1, f \rangle \cong E(3^2)$ ,  $t^2 \in \langle u_1 \rangle$  und  $f^t = f^2$  sowie  $QP \leq QP \cdot (F \cdot \langle t \rangle)$  gilt. Da  $Q$  und  $P$  die einzigen  $E(2^7)$ -Untergruppen in  $QP$  sind, normalisiert  $F \cdot \langle t \rangle$  dann  $Q$  und  $P$ . Also gilt  $N_{QN'}(QP) = QP \cdot (F \cdot \langle t \rangle)$  und

$$N_N(QP)/(QP) \cong \begin{cases} Z_3 \times \text{Sym}_3, & \text{falls } \overline{N}_O \cong \mathfrak{S}Alt_6 \\ \text{Sym}_3 \times \text{Sym}_3, & \text{falls } \overline{N}_O \cong \mathfrak{S}ym_6. \end{cases}$$

Es sei nun  $X := N_G(QP)$ . Wegen  $2 = |\text{cccl}_X(Q)| = |X : (X \cap N)|$  folgt  $X = N_N(QP)\langle x \rangle$ . Mit dem Frattini-Argument sehen wir nun, daß o.B.d.A.  $\langle x \rangle \leq N_X(F)$ , denn es ist  $F \in \text{Syl}_3(X)$ . Offensichtlich ist  $(a_1)^x \in F - \langle a_1 \rangle$ ; mit (6.10) folgt jetzt, daß  $a_1$  in  $G$  zu seinem Inversen konjugiert ist. Also gilt insbesondere  $\overline{N}_O \cong \mathfrak{S}ym_6$  und somit dann auch  $N_N(QP)/(QP) \cong \text{Sym}_3 \times \text{Sym}_3$ .

Es gilt nun  $C_G(F) = C_G(a_1, f) = \langle u_1 \rangle \times F$ ; also ist  $N_G(F) \leq C_G(u_1) = N$ . Wir haben damit einen endgültigen Widerspruch erhalten, denn es ist  $x \in N_G(F)$  und  $x \notin N$ .

Q.E.D.

(6.17) Lemma. Ist  $N$  eine 2-lokale Untergruppe von  $G$ , welche eine Sektion isomorph zu  $\text{Alt}_6$  involviert, so ist  $N$  in  $J$  nicht zu einer Untergruppe von  $M$  konjugiert.

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß  $N$  eine maximale 2-lokale Untergruppe von  $G$  ist derart, daß  $N \leq M$  gilt und eine zu  $\text{Alt}_6$  isomorphe Sektion in  $N$  involviert ist. Wir setzen  $Q := O_2(N)$  und  $\bar{M} := M/U$ . Aus (6.8) folgt unmittelbar, daß  $U$  nicht in  $N$  enthalten ist; also gilt insbesondere  $Q_0 := Q \cap U \neq U$ .

Da  $(M \cap H)/U \cong E(2^6) \cdot \hat{3}\text{Sym}_6$  ein Repräsentant der einzigen konjugierten Klasse von maximalen Untergruppen in  $\bar{M}$  ist, welche eine Sektion isomorph zu  $\hat{3}\text{Alt}_6$  involvieren, folgt aus (6.16) offensichtlich, daß es in  $N$  keine zu  $\hat{3}\text{Alt}_6$  isomorphe Sektion gibt.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $Q_0 < Q$  ist. Eine Inspektion der maximalen Untergruppen von  $M_{24}$  liefert nun, daß  $Q/Q_0 \cong E(2^4)$  und  $N/Q \cong \text{Alt}_6$ ,  $\text{Sym}_6$ ,  $\text{Alt}_7$  oder  $\text{Alt}_8$  ist; insbesondere können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $UQ = U \cdot E_2$  und somit  $N \leq U \cdot E_2 \cdot A_2$  gilt. Da  $|Q| \geq 2^5$  ist, gilt ferner  $Q_0 \neq \langle 1 \rangle$ .

Ist  $Q_0$  nicht in  $U^*$  enthalten, so existieren Elemente  $w$  und  $w'$  in  $U^*$  sowie  $e \in E_2^*$  derart, daß  $ws \in Q - U^*$  und  $w'e \in Q - U$  ist; somit enthält  $Q$  auch das Element  $[w'e, ws] = [e, w] \cdot [e, s]$ , welches in  $U^* - U_0$  liegt. Da aber  $U^*/U_0 \cong E(2^4)$  ein irreduzibler  $N/Q$ -Modul ist, folgt jetzt  $U_0 Q_0 = U$  sowie  $U_0 Q = U \cdot E_2$ . Wegen  $U_0 = Z(U \cdot E_2)$  erhalten wir nun  $Q' \geq [Q_0, Q] = [U, U \cdot E_2] = (U \cdot E_2)' = U^*$  und somit auch

$Q_0 = U$  ; dies ist jedoch ein Widerspruch. Es gilt also  $Q_0 \leq U^*$  .

Da  $UE_2 = U^*E_2 \cdot \langle s \rangle$  ist mit  $[s, A_2] = U_0$  und da  $N/Q$  irreduzibel auf  $Q/Q_0$  operiert, gilt  $Q \leq U^* \cdot E_2$  .

Es sei  $P \in \text{Syl}_3(N)$  ; dann ist  $P \cong E(3^2)$  und nach (3.15) gilt  $N_J(P) = N_M(P)$  . Wegen  $N = G \rtimes M$  folgt nun  $P \in \text{Syl}_3(G)$  und  $N_G(P) = N_N(P)$  sowie  $|G : N| \equiv 1 \pmod{3}$  .

Wir nehmen nun an, daß  $Q_0$  nicht in  $U_0$  enthalten ist. Da  $N/Q$  irreduzibel auf  $U^*/U_0 \cong E(2^4)$  operiert, folgt  $U_0 Q_0 = U^*$  sowie  $U_0 Q = U^*E_2$  ; damit erhalten wir ähnlich wie oben  $Q' \geq [Q_0, Q] = [U^*, E_2] = U_0$  und somit  $Q_0 = U^*$  und  $Q = U^*E_2$  .

Es sei  $Y \in \text{Syl}_2(N)$  . Offensichtlich ist  $N_G(Y) \leq N_G(U^*)$  ; wegen  $C_J(U^*) = U$  folgt dann  $N_G(Y) \leq G \rtimes M = N$  . Also ist  $Y \in \text{Syl}_2(G)$  .

Es sei ferner  $F \in \text{Syl}_5(N)$  . Dann ist  $C_Q(F) = C_{U_0}(F) = E(2^2)$  mit  $C_Q(F)^* \leq \text{cccl}_J(w_1)$  . Da  $C_J(w) \leq M$  ist für  $w \in C_Q(F)^*$  , ist  $C_Q(F)$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_G(F)$  . Mit (3.16) sehen wir nun leicht, daß  $C_G(F) = F \times C_Q(F) \cdot D$  ist mit  $D \leq Z_3$  . Offensichtlich ist  $N_G(F)/C_G(F) \leq Z_4$  und somit  $|N_G(F)|_2 = |N_N(F)|_2$  . Da nach (3.12) und (6.4) auch  $N_J(C_Q(F)) \leq M$  gilt, folgt jetzt  $N_G(F) = N_N(F)$  . Insbesondere gilt also  $|G : N| \equiv 1 \pmod{5}$  .

Wir haben also gezeigt, daß  $|G : N| \equiv 1 \pmod{30}$  ist und  $|N| = 2^{14} \cdot |N/Q|$  , wobei  $N/Q$  isomorph zu  $\text{Alt}_6$  ,  $\text{Sym}_6$  ,  $\text{Alt}_7$  oder  $\text{Alt}_8$  ist. Eine Inspektion der Liste in (6.14) zeigt, daß entweder  $N/Q \cong \text{Sym}_6$  und  $|G : N| = 7 \cdot 11 \cdot 23$  oder aber  $N/Q \cong \text{Alt}_8$  und  $|G : N| = 31$  ist; im letzteren Falle ist

$G$  offensichtlich eine 2-fach transitive Permutationsgruppe auf  $\text{ccl}_G(N)$  und somit nach (1.20) in  $\mathcal{K}$  enthalten, welches jedoch unmöglich ist. Also gilt  $|G : N| = 7 \cdot 11 \cdot 23$  sowie  $N/Q \cong \text{Sym}_6$ .

Wir können nun also o.B.d.A. annehmen, daß  $N' = U * E_2 * B'$  und  $N \leq N' \langle s, r_1 \rangle$  ist. Ferner ist  $Y := N \cap S$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $N$  mit  $U * E_2 \langle r_1 r_3 d_1, r_1 s_1, t_1 s_2 \rangle = Y \cap N'$ . Mit (5.3) sehen wir nun leicht, daß jede zu  $E(2^9)$  isomorphe Untergruppe von  $N$  in  $Q$  und somit insbesondere in einem Element  $X \in \{U^*, V, W\}$  enthalten ist. Es sei nun  $\tilde{N}$  ein Element aus  $\text{ccl}_G(N)$  mit  $\tilde{N} \neq N$ . Ist  $E(2^9) = X_0 \leq N \cap \tilde{N}$ , so folgt wegen  $C_J(X_0) \in \{U, V, W\}$  dann offensichtlich  $C_G(X_0) = X \in \{U^*, V, W\}$  sowie  $X \leq N \cap \tilde{N}$ . Da aber in allen Fällen wegen der Maximalität von  $N$  stets  $N = N_G(X)$  gilt, erhalten wir den Widerspruch  $N = \tilde{N}$ . Somit gibt es also in  $N \cap \tilde{N}$  keine zu  $E(2^9)$  isomorphen Untergruppen. Insbesondere gilt dann  $4 \mid |N : (N \cap \tilde{N})|$ . Da  $|G : N| \equiv 3 \pmod{4}$  ist, erhalten wir jetzt offensichtlich einen Widerspruch.

Wir haben also gezeigt, daß  $Q_0 \leq U_0$  ist.

Wir betrachten nun die Gruppe  $D := U * E_2 B' = V E_2 B'$  bzw.  $\tilde{D} := D/U_0$ . Offensichtlich sind  $\tilde{U}^*, \tilde{V}$  und  $\tilde{E}_2 = \tilde{W}$  irreduzible  $\text{GF}(2) - \tilde{D}/O_2(\tilde{D})$ -Moduln der Dimension vier; diese sind sogar isomorphe Moduln, da  $\text{Sym}_3 \cong \langle a_3, t_1 s_2 \rangle \leq B'$  ist mit  $C_{\tilde{V}}(\tilde{a}_3) = \langle \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 \rangle$  und  $C_{\tilde{W}}(\tilde{a}_3) = \langle \tilde{r}_0, \tilde{r}_2 \rangle$ . Ist nun  $X \cong E(2^9)$  eine  $\tilde{D}$ -invariante Untergruppe von  $O_2(\tilde{D})$  mit  $\tilde{V} \neq X \neq \tilde{W}$ , so gilt  $C_X(\tilde{a}_3) = \langle \tilde{V} \tilde{r}_0, \tilde{W} \tilde{r}_2 \rangle$  mit  $\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle \leq \langle \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 \rangle$ . Wegen  $[r_0, t_1 s_2] = [v_1, t_1 s_2] = 1$  und  $[v_2, t_1 s_2] = v_1$  sowie  $X \cap \{\tilde{V}_1, \tilde{r}_0\} = \emptyset$  folgt  $\tilde{V}_1 \tilde{r}_0 \in X$  und damit  $X = \tilde{U}^*$ .

Wir haben also gezeigt, daß  $\tilde{U}^*$ ,  $\tilde{V}$  und  $\tilde{E}_2 = \tilde{W}$  die einzigen  $\tilde{D}$ -invarianten Untergruppen der Ordnung  $2^4$  in  $O_2(\tilde{D})$  sind. Wir beachten ferner, daß die Involution  $s$  die Gruppe  $U^*N$  normalisiert und daß  $W^S = V$  gilt. Damit sehen wir nun leicht, daß o.B.d.A.  $Q \leq V$  ist.

Wir nehmen jetzt an, daß  $Q = V$  ist. Dann sei  $Y$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $N$ ; offensichtlich ist  $V$  die einzige  $E(2^{10})$ -Untergruppe von  $Y$  und damit  $Y \in \text{Syl}_2(G)$ . Ferner ist  $V$  schwach abgeschlossen in  $Y$  bzgl.  $G$ ; nach (1.16) ist  $V$  jedoch nicht stark abgeschlossen in  $Y$ . Ist  $N/V \neq \text{Alt}_8$ , so sind die Involutionen aus  $VN'/V$  in  $L/V$  nicht-2-zentral; mit (3.8) und (1.17) erhalten wir in diesem Fall dann offensichtlich einen Widerspruch, da  $Y/V$  isomorph zu  $D_8$  oder  $D_8 \times Z_2$  ist. Damit folgt also  $N/V \cong \text{Alt}_8$ . Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß  $N = V \cdot A_2$  ist. Es sei  $F \in \text{Syl}_5(N)$ . Dann gilt  $C_N(F) = F \times C_V(F) \cdot D$ , wobei  $D \cong Z_3$  und  $C_V(F) \cdot D \cong \text{Alt}_4$  ist; ferner ist  $N_N(F)/C_N(F) \cong Z_4$  und  $C_V(F)^* = C_{U_0}(F)^* \leq \text{ccl}_M(w_1)$ . Wir haben einen ähnlichen Fall bereits oben behandelt; die gleichen Argumente liefern jetzt auch  $N_G(F) = N_N(F)$ . Also gilt  $|G : N| \equiv 1 \pmod{5}$ . Wir haben insgesamt also gezeigt, daß  $|G : N| \equiv 1 \pmod{30}$  ist mit  $|N| = 2^{16} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ . Mit (6.14) erhalten wir jetzt  $|G : N| = 31$ . Offensichtlich operiert dann  $G$  2-fach transitiv auf  $\text{ccl}_G(N)$ ; mit (1.20) folgt nun ein Widerspruch. Wir haben damit gezeigt, daß  $Q$  echt in  $V$  enthalten ist. insbesondere ist dann  $Q_0 < U_0$ .

Da jede zu  $\text{Alt}_7$  isomorphe Sektion in  $U^*E_2A_2$  irreduzibel auf  $U_0$  operiert, gilt ferner  $\text{Alt}_6 \leq N/Q \leq \text{Sym}_6$ .

Aus (6.7) folgt nun, daß entweder  $Q_0 = \langle w_1 \rangle$  ist oder  $Q_0 = W_0 := \langle w_1, u_1, u_2, u_4, u_5, u_4 u_5 \rangle$ . Ist  $Q_0 = \langle w_1 \rangle$ , so erfüllen  $N_0 := N^\infty$  und  $N$  offensichtlich die Voraussetzung von (1.22); wir erhalten damit den Widerspruch  $G \in \mathcal{K}$ . Somit ist also  $Q_0 = W_0 \cong E(2^5)$  und  $Q \cong E(2^9)$ . Ferner ist  $Q = [Q, N]$ , da nach (6.7)  $W_0$  ein unzerlegbarer Modul für  $QN'/Q$  ist; also gilt  $Q \leq N'$  und  $\text{Alt}_6 \cong N'/Q \leq N/Q \leq \text{Sym}_6$ . Ist  $x$  eine Involution aus  $N'/Q$ , so gilt offensichtlich  $C_Q(x) \cong E(2^5)$ ; für Involutionen  $y$  aus  $N/Q - N'/Q$  folgt wegen  $Q \leq V$  aus (3.8) nun  $|C_Q(y)| \leq 2^7$ . Damit ist nun klar, daß  $Q$  die einzige  $E(2^9)$ -Untergruppe in einer Sylow 2-Untergruppe  $Y$  von  $N$  ist; außerdem ist dann  $Y$  auch eine Sylow 2-Untergruppe von  $G$ , in der  $Q$  zwar schwach, aber nicht stark abgeschlossen ist bzgl.  $G$ . Jetzt erhalten wir jedoch offensichtlich mit (1.17) einen Widerspruch.

Wir haben bisher also bewiesen, daß  $Q = Q_0 < U$  gilt und  $N/Q$  isomorph ist zu einer Untergruppe von  $\bar{M}$ , welche eine zu  $\text{Alt}_6$ , jedoch keine zu  $3\text{Alt}_6$  isomorphe Sektion involviert. Da  $|Q| \geq 2^5$  und  $Q \neq U$  ist, folgt aus (3.25) nun unmittelbar, daß  $N$  keine zu  $L_3(4)$  isomorphe Sektion involviert. Eine Inspektion der maximalen Untergruppen von  $\bar{M} \cong M_{24}$  zeigt nun, daß entweder  $\text{Alt}_6 \leq N/Q \leq \text{Aut}(\text{Alt}_6)$  oder  $N/Q \cong \text{Alt}_7$  oder  $N/Q \cong \text{Alt}_8$  ist.

Wir nehmen nun zunächst an, daß  $\text{Alt}_7$  in  $N$  involviert ist. Da es in  $M_{24}$  jeweils genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen gibt, welche zu  $\text{Alt}_7$  bzw. zu  $\text{Alt}_8$  isomorph sind, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $UN = U \cdot D$  ist mit  $D \in \{A, A_2\}$ , wobei  $\text{Alt}_7 = A \leq A_2 = \text{Alt}_8$  ist.

Da  $E(2^5) \leq Q < U$  ist, folgt aus (3.24) nun, daß  $Q$  ein Element aus  $\{U_0, U_0\langle s \rangle, U^*\}$  ist. Wir können in jedem Fall o.B.d.A. annehmen, daß  $N = Q \cdot D$  gilt. Ist nun  $Q \leq U_0\langle s \rangle$ , so folgt  $N' = U_0 \cdot D$ ; da  $N'$  und  $N$  offensichtlich die Voraussetzungen von (1.22) erfüllen, erhalten wir also den Widerspruch  $G \in \mathcal{K}$ . Somit gilt also  $Q = U^* \cong E(2^{10})$ . Es sei nun  $Y \in \text{Syl}_2(N)$ ; offensichtlich ist  $Q$  die einzige zu  $E(2^{10})$  isomorphe Untergruppe von  $Y$  und somit  $Y$  auch eine Sylow 2-Untergruppe von  $G$ . Mit (5.3) sehen wir ferner, daß jede zu  $E(2^9)$  isomorphe Untergruppe von  $Y$  in  $Q$  enthalten ist; damit folgt dann  $4 \mid |N : (N \cap N^g)| = |\text{cc1}_N(N^g)|$  für  $g \in G - N$ . Somit gilt also  $|G : N| \equiv 1 \pmod{4}$ . Aus (3.15) folgt außerdem, daß  $N$  einen Sylow 3-Normalisator von  $G$  enthält. Es ist also  $|G : N| \equiv 1 \pmod{12}$  sowie  $|N| \in \{2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, 2^{16} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7\}$ ; eine Inspektion der Liste in (6.14) zeigt, daß wir einen Widerspruch erhalten haben.

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse noch einmal zusammen: Es ist  $E(2^5) \leq Q = O_2(N) < U$  und  $\text{Alt}_6 \leq N/Q \leq \text{Aut}(\text{Alt}_6)$ .

Wir nehmen nun an, daß  $|Q| \geq 2^9$  ist. Nach (6.7) sind in  $Q$  dann genau zwei irreduzible  $\text{GF}(2)$ - $N'$ -Moduln der Dimension vier involviert; also gilt  $[Q, x] \geq E(2^4)$  für Elemente  $x$  aus  $QN' - Q$  mit  $x^2 \notin Q$ . Für Elemente  $y$  aus  $N - QN'$  mit  $y^2 \in Q$  gilt nach (3.8) offensichtlich  $E(2^2) \leq [Q, y]$ . Da es in  $\text{Aut}(\text{Alt}_6)$  kein zu  $E(2^2)$  isomorphes Komplement von  $\text{Alt}_6$  gibt, sehen wir nun leicht, daß  $Q$  die einzige elementar-abelsche Untergruppe von der Ordnung  $|Q|$  in  $N$  ist. Also ist eine Sylow 2-Untergruppe

$Y$  von  $N$  auch in  $\text{Syl}_2(G)$  enthalten; insbesondere ist  $Q$  schwach abgeschlossen in  $Y$  bzgl.  $G$ . Nach (1.16) ist  $Q$  jedoch nicht stark abgeschlosssen in  $Y$  bzgl.  $G$ . Nun erhalten wir aber mit Hilfe von (1.17) einen Widerspruch. Es gilt also  $E(2^5) \leq Q \leq E(2^8)$ . Mit (6.7) erhalten wir dann sogar  $E(2^5) \leq Q \leq E(2^7)$ .

Wir setzen jetzt  $N_0 := N^\infty$  sowie  $Q_1 := O_2(N_0)$ . Offensichtlich gilt  $E(2^4) \leq Q_1 \leq Q$  und  $N_0/Q_1 \cong \text{Alt}_6$  sowie  $O^2(N_0) = N_0 \not\leq N$  und  $[Q_1, N_0] = Q_1$ .

Mit Hilfe von (6.7) bestimmen wir nun die Struktur von  $Q$  als  $N_0/Q_1$ -Modul. Zunächst stellen wir fest, daß  $Q_1$  ein unzerlegbarer  $N_0$ -Modul ist mit  $C_{Q_1}(N_0) = C_{Q_1}(N) = \langle w \rangle \cong Z_2$  und  $Q_1/\langle w \rangle \cong E(2^4)$ . Ist  $Q \neq Q_1$ , so ist  $Q = Q_1 \times \langle v \rangle$  oder  $Q = Q_2$  oder  $Q = Q_2 \times \langle v \rangle$ , wobei  $Q_2$  ein unzerlegbarer  $N_0$ -Modul mit  $Q_1 < Q_2 \cong E(2^6)$  und  $Z_2 \cong \langle v \rangle \neq \langle w \rangle$  mit  $[\langle v \rangle, N_0] = \langle 1 \rangle$  ist.

Es sei nun  $X$  eine maximale 2-lokale Untergruppe von  $G$  mit  $N_0 \leq X$ ; ferner sei  $P := O_2(X)$ . Aus der Maximalität von  $N$  folgt zunächst  $C_G(w) = N$ ,  $N_G(Q_1) = N$  und  $C_G(Q_1) = Q$ . Da  $PQ_1$  eine 2-Gruppe ist, folgt  $\langle 1 \rangle \neq Z(P) \cap Q$ . Ist nun  $Z(P) \cap Q_1 \neq \langle 1 \rangle$ , so gilt  $\langle w \rangle \leq Z(P)$  und somit  $P \leq Q$ . Ist  $Z(P) \cap Q_1 = \langle 1 \rangle$ , so folgt aus der  $N_0$ -Invarianz von  $Z(P) \cap Q$  offensichtlich  $Z(P) \cap Q = \langle \tilde{v} \rangle$  mit  $\tilde{v} \in v \cdot \langle w \rangle$ ; da nach (6.7)  $\tilde{v} \in \text{ccl}_M(w_1)$  ist, folgt  $P \leq G \cap M = N$  und wegen  $[P, N_0] \leq P$  dann schließlich  $P \leq Q$ . Also gilt in jedem Falle  $P \leq Q$ . Damit folgt  $Q \leq C_G(P) \leq P$ ; somit ist  $P = Q$  und  $X = N$ . Mit (1.22) erhalten wir nun den endgültigen Widerspruch  $G \in \mathcal{K}$ .



(6.18) Lemma. In 2-lokalen Untergruppen von  $G$  ist keine Sektion isomorph zu  $\text{Alt}_6$  involviert.

Beweis. Wir nehmen an, daß  $N$  eine 2-lokale Untergruppe von  $G$  ist, welche eine Sektion isomorph zu  $\text{Alt}_6$  involviert; ferner sei  $Q := O_2(N)$  und  $Y \in \text{Syl}_2(N)$ .

Nach (5.1), (6.16) und (6.17) können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $N = G \cap L \leq L = V \cdot L_0 \approx E(2^{10}) \cdot L_5(2)$  ist. Mit (1.1) sehen wir unmittelbar, daß o.B.d.A.  $N \leq V \cdot E_1 \cdot A_1$  gilt mit einem geeigneten  $i \in \{1, 2\}$ . Da  $VE_2A_2 \leq M$  ist, folgt aus (6.17) dann  $N \leq VE_1A_1$ .

Wir nehmen zunächst an, daß  $Q \leq V$  gilt. Ist  $X$  eine zu  $\text{Alt}_7$  oder  $\text{Alt}_8$  isomorphe Untergruppe von  $E_1A_1$ , so ist  $V \cdot X$  in  $L$  zu einer Untergruppe von  $VA_2$  konjugiert. Da nach (6.17) die Gruppe  $N$  nicht zu Untergruppen von  $M$  konjugiert ist, liefert eine Inspektion der Untergruppen von  $\text{Alt}_8$  zusammen mit den Resultaten von (6.6) nun, daß  $\text{Alt}_6 \approx QN'/Q \approx VN'/V \leq VN/V \approx N/Q \leq \text{Sym}_6$  ist und daß ferner o.B.d.A.  $VN' = V \cdot X_2$  sowie  $VN \leq V \cdot X_2 \cdot \langle r_0r_2 \rangle$  gilt, wobei wie in (6.6)  $X_2 = \langle r_0r_2r_3d_2, r_0r_1r_2s_2, s_1t_2, y_1, y_2 \rangle \approx \text{Alt}_6$  ist.

Wir beachten, daß  $r_0r_2r_3d_2, r_3d_2$  und  $r_0r_2$  Repräsentanten der drei verschiedenen Konjugiertenklassen von Involuntionen in  $X_2 \cdot \langle r_0r_2 \rangle \approx \text{Sym}_6$  sind; ferner gilt  $C_V(r_0r_2) \approx E(2^7)$  und  $C_V(r_0r_2r_3d_2) \approx C_V(r_3d_2) \approx E(2^6)$ .

Wir betrachten nun zunächst den Fall, daß  $|Q| \geq 2^9$  ist. Offensichtlich gilt dann  $QN' = Q \cdot X_2$  und  $[Q, r_0r_2r_3d_2] \approx E(2^4)$ . Somit ist  $Q$  die einzige elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung  $|Q|$  in  $N$ ; insbesondere ist  $Y \in \text{Syl}_2(G)$  und  $Q$

schwach abgeschlossen in  $Y$  bzgl.  $G$ . Mit (1.16) ist  $Q$  nicht stark abgeschlossen in  $Y$  bzgl.  $G$ . Jetzt liefert die Anwendung von (1.17) offensichtlich einen Widerspruch. Damit gilt also  $|Q| \leq 2^8$ .

Wegen  $|Q| \geq 2^5$  folgt mit (6.6) nun unmittelbar, daß  $Q = Q_0 \cdot \langle u_4, u_5, v_2 \rangle \cong E(2^5)$  ist, wobei  $Q_0 = C_V(E_1) \cong E(2^4)$  die einzige nichttriviale  $X_2$ -invariante Untergruppe von  $Q$  ist. Wir setzen nun  $N_0 := N^\infty$ . Offensichtlich gilt dann  $O^2(N_0) = N_0 \not\leq N$ ,  $O_2(N_0) = Q_0 \cong E(2^4)$  und  $N_0/Q_0 \cong \text{Alt}_6$ .

Es sei  $X$  eine maximale 2-lokale Untergruppe von  $G$  mit  $N_0 \leq X$ ; ferner sei  $P := O_2(X)$ . Da  $C_G(Q_0) = Q$  und außerdem  $\langle 1 \rangle \neq Z(P) \cap C_G(Q_0)$   $N_0$ -invariant ist, folgt  $Q_0 \leq P$  und somit  $P \leq Q$ . Da  $X$  2-constrained ist, folgt jetzt  $P = Q$  und  $X = N$ . Mit (1.22) erhalten wir nun den Widerspruch  $G \in \mathcal{K}$ .

Wir haben also gezeigt, daß  $Q$  nicht in  $V$  enthalten ist. Insbesondere gilt dann  $VQ = V \cdot E_1$ ; außerdem können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $VE_1X_2 = VN' \leq VN \leq VE_1A_1$  ist. Wegen  $|Q| \geq 2^5$  ist ferner  $Q_0 := Q \cap V \neq \langle 1 \rangle$ ; offensichtlich gilt  $W_0 := C_V(E_1) = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 \rangle \leq Q_0$ .

Wir betrachten nun den Fall, daß  $Q = V \cdot E_1$  ist. Offensichtlich ist  $V$  die einzige  $E(2^{10})$ -Untergruppe von  $N$  und somit  $Y \in \text{Syl}_2(G)$ .

Wir nehmen jetzt an, daß  $\text{Alt}_6 \leq N/Q \leq \text{Sym}_6$  ist. Also gilt  $VE_1X_2 = VN' \not\leq N \leq VE_1X_2 \langle r_2 \rangle$ . Wir können nun o.B.d.A. annehmen, daß  $Y_0 := VE_1 \langle r_2 r_3 d_2, r_2 s_2, s_1 t_2 \rangle \not\leq Y \not\leq Y_0 \langle r_2 \rangle$  ist. Mit (5.3) sehen wir leicht, daß für  $E(2^9) \cong X \leq Y$  stets

$X \leq C_G(X) = V$  gilt. Somit gilt für  $g \in G - N$  also  $V^g \cap N \leq E(2^8)$  und damit insbesondere  $|V^g \cap N| \leq |V|/4$ . Mit (1.18) folgt jetzt  $Y \leq N'$ . Da  $(VE_1)' = [V, E_1] = W_0$  ist, folgt mit (6.6) nun aber auch  $V \cap N' \cong E(2^9)$ ; wir haben damit einen Widerspruch erhalten.

Gilt  $N/Q \cong \text{Alt}_7$ , so können wir wie oben o.B.d.A. annehmen, daß  $Y = Y_0$  ist; ebenso erhalten wir auch, daß  $4 \nmid |N : (N \cap N^g)|$  und damit  $|G : N| \equiv 1 \pmod{4}$  ist. Da  $|N| = 2^{17} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$  gilt, stellen wir mit Hilfe der Liste in (6.14) nun leicht fest, daß wir einen Widerspruch erhalten haben.

Eine Inspektion der Untergruppen von  $\text{Alt}_8$  zeigt nun, daß  $N = VE_1A_1$  ist; also gilt  $|N| = 2^{20} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ . Offensichtlich ist dann  $Y \in \text{Syl}_2(G)$ . Wir wenden nun (6.14) an und beachten dabei (6.2.b); wir erhalten dann unmittelbar  $|G : N| \in \{31, 3 \cdot 29, 3 \cdot 11\}$ . Mit (1.21) sehen wir nun, daß  $G$  2-fach transitiv auf  $\text{ccl}_G(N)$  operiert; mit (1.20) folgt nun aber der Widerspruch  $G \in \mathcal{K}$ .

Wir haben damit gezeigt, daß  $Q_0 = Q \cap V < V$  ist.

Wir nehmen nun an, daß  $7 \in \Pi(N)$  ist; dann ist also  $N/Q$  isomorph zu  $\text{Alt}_7$  oder zu  $\text{Alt}_8$ . Da  $V/W_0 \cong E(2^6)$  ein irreduzibler Modul für  $N/Q$  ist, folgt wegen  $Q_0 < V$  jetzt  $Q_0 = W_0$ . Wir beachten daß für  $X \in \text{Syl}_7(N)$  stets  $C_Q(X) = C_{VE_1}(X) = C_{W_0}(X) \times C_{E_1}(X) \cong E(2^2)$  gilt; da nun jede  $\text{Alt}_7$ -Sektion von  $E_1A_1$  irreduzibel auf  $W_0$  und auf  $E_1$  operiert, folgt wegen  $[V, E_1] = W_0 = Q_0$  offensichtlich  $Q = W_0 \times E_1 \cong E(2^8)$ .

Ist  $N/Q \cong \text{Alt}_7$ , so gilt  $C_Q(x) \cong E(2^4)$  für  $x \in N - Q$  mit  $x^2 \in Q$ . Dann ist insbesondere  $Q$  die einzige zu  $E(2^8)$  isomorphe Untergruppe von  $N$  und somit  $Y \in \text{Syl}_2(G)$ ; ferner ist  $Q$  schwach abgeschlossen in  $Y$  bzgl.  $G$ . Mit (1.17) sehen wir nun leicht, daß  $Q$  auch stark abgeschlossen ist in  $Y$  bzgl.  $G$ ; jetzt folgt mit (1.16)  $G \in \mathcal{K}$ . Dies ist aber unmöglich. Damit gilt also  $N/Q \cong \text{Alt}_8$ .

Wir beachten, daß es in  $V$  ein  $A_1$ -invariantes Komplement  $C_0$  von  $W_0$  gibt. Bekanntlich gibt es dann in der Gruppe  $D_0 := C_0 \cdot A_1$  genau zwei konjugierten Klassen von zu  $\text{Alt}_8$  isomorphen Untergruppen; wir wählen dann  $\tilde{A}_1$  derart, daß  $A_1$  und  $\tilde{A}_1$  Repräsentanten dieser zwei Klassen sind. Da  $\tilde{A}_1$  auf  $\text{cc}_{D_0}(A_1)$  zwei Bahnen mit den Längen 8 und 56 induziert, können wir ferner o.B.d.A. annehmen, daß  $A_1 \cap \tilde{A}_1$  isomorph zu  $\text{Alt}_7$  ist. Wir wissen außerdem, daß es in  $A_1$  genau eine Klasse von zu  $\text{Alt}_6$  isomorphen Untergruppen gibt; mit (6.6) sehen wir jetzt, daß offensichtlich o.B.d.A.  $\text{Alt}_6 = X_1 := \langle r_2 r_3 d_2, r_2 s_2, t_2 s_1, y_1, y_2 \rangle \leq D_1 := A_1 \cap \tilde{A}_1$  ist. Wir beachten schließlich noch, daß  $T_1 := \langle r_2, r_3, s_1, d_2, s_2, t_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $A_1$  ist.

Wir können nunmehr also o.B.d.A. annehmen, daß  $N = Q \cdot G_0$  ist mit einem geeigneten  $G_0 \in \{A_1, \tilde{A}_1\}$ ; ferner sei  $T_0$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $G_0$  derart, daß  $T_0 = G_0 \cap C_0 T_1$  gilt. Dann ist also  $G_0 \geq D_1 \geq X_1 \geq X_1 \cap T_0 = \langle r_2 r_3 d_2, r_2 s_2, t_2 s_1 \rangle$  und  $Y = Q \cdot T_0 \in \text{Syl}_2(N)$ .

In der folgenden Tabelle listen wir Repräsentanten  $X$  der verschiedenen konjugierten Klassen von elementar-abelschen 2-Gruppen in  $A_1$  auf, welche nur 2-zentrale Involutionen aus  $A_1$  enthalten, sowie die Zentralisatoren  $C_Q(X)$ .

| $X$                             | $C_Q(X)$                                       |
|---------------------------------|------------------------------------------------|
| $\langle r_2 \rangle$           | $\langle u_1, u_2, u_3, r_0, r_1, d_1 \rangle$ |
| $\langle r_2, r_3 \rangle$      | $\langle u_1, u_2, r_0, r_1, d_1 \rangle$      |
| $\langle r_2, d_2 \rangle$      | $\langle u_1, u_2, u_3, r_0, r_1 \rangle$      |
| $\langle r_2, r_3, s_1 \rangle$ | $\langle u_1, r_0, r_1, d_1 \rangle$           |
| $\langle r_2, d_2, t_2 \rangle$ | $\langle u_1, u_2, u_3, r_0 \rangle$           |

Es sei nun  $E(2^8) \approx P \leq Y$  mit  $P \not\approx Q$ . Mit Hilfe der obigen Tabelle stellen wir nun leicht fest, daß  $P$  eine Involution  $j$  enthält derart, daß  $jQ$  eine nicht-2-zentrale Involution in  $N/Q \approx G_0$  ist. Somit gibt es in  $jQ$  eine Involution, welche ein Element der Ordnung fünf aus  $N$  invertiert; also gilt  $C_Q(j) = [Q, j] \approx E(2^4)$ . Nun ist klar, daß  $P \cap Q \approx P/(P \cap Q) \approx QP/Q \approx E(2^4)$  gilt. Da  $T_0$  genau eine  $E(2^4)$ -Untergruppe hat, etwa  $E_0$ , und da  $E_0$  von nicht-2-zentralen Involutionen aus  $G_0$  erzeugt wird, folgt nun  $P = (P \cap Q) \times E_0$  sowie  $E_0 \geq \langle r_2 r_3 d_2, r_2 s_2 \rangle$  und  $P \cap Q = C_Q(r_2 r_3 d_2, r_2 s_2) = \langle u_1, u_2, r_0, r_1 \rangle$ .

Wir beachten, daß  $N_G(E_0)/E_0 \approx \text{Sym}_3 \times \text{Sym}_3$  ist und genau zwei Bahnen auf  $E_0^*$  induziert, von denen eine aus 9 2-zentralen und die andere aus 6 nicht-2-zentralen Involutionen von  $G_0$  besteht; es sei  $x_0 \in E_0$  derart, daß  $x_0$  eine 2-zentrale Involution in  $G_0$  ist. Wir setzen dann  $z := |(P \cap Q)x_0 \cap \text{ccl}_j(u_1)|$  und beachten außerdem, daß  $(P \cap Q)^* \subseteq \text{ccl}_j(u_1)$  und  $(P \cap Q)r_2 r_3 d_2 = \text{ccl}_Q(r_2 r_3 d_2) \subseteq \text{ccl}_j(u_1)$  ist. Damit folgt  $|P \cap \text{ccl}_j(u_1)| = 15 + 6 \cdot 16 + 9 \cdot z$ .

Wegen  $(\forall E_1 A_1 \# Q) = 15 u_1 + 120 r_0 + 120 v_1 r_0$  gilt dann  $|Q \cap \text{ccl}_j(u_1)| = 135$ , denn es ist  $v_1 r_0 \sim w_1$  und  $r_0 \sim u_1$ .

Somit ist nun klar, daß  $Q$  in  $J$  nicht zu  $P$  konjugiert ist. Da  $Q$  und  $P$  die einzigen zu  $E(2^6)$  isomorphen Untergruppen in  $Y$  sind, ist  $Q$  schwach abgeschlossen in  $Y$  bzgl.  $G$ ; insbesondere ist dann  $Y \in \text{Syl}_2(G)$ .

Da  $C_Q(x_0) \cong E(2^6)$  ist für 2-zentrale Involutionen  $x_0$  aus  $G_0$ , ist dann offensichtlich für  $E(2^7) = \tilde{Q} < Q$  stets  $C_G(\tilde{Q}) = Q$ . Insbesondere gilt dann  $Q^g \cap N \leq E(2^6)$  und damit  $4 \mid |N : (N \cap N^g)|$  für Elemente  $g$  aus  $G - N$ ; also ist  $|G : N| \equiv 1 \pmod{4}$  sowie  $|N| = 2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ . Mit Hilfe der Liste in (6.14) erhalten wir nun  $|G : N| \in \{3, 29\}$ ; somit folgt aus (1.21) und (1.20) der Widerspruch  $G \in \mathcal{K}$ .

Wir haben gezeigt, daß  $7 \nmid \Pi(N)$  ist; insbesondere gilt dann  $\text{Alt}_6 \cong QN'/Q \not\cong N/Q \leq \text{Sym}_6$ .

Es sei daran erinnert, daß  $W_0 = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 \rangle = C_V(E_1)$  ist; wir setzen außerdem  $W_1 := W_0 \cdot \langle u_4 u_6 v_2 \rangle \cong E(2^5)$  sowie  $W_2 := W_1 \cdot \langle u_4, u_5, v_3, u_6 v_4 \rangle \cong E(2^9)$ . Nach (6.6) können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $N \leq VE_1 \cdot X_1 \cdot \langle r_2 \rangle = VE_1 \cdot X_2 \cdot \langle r_2 \rangle$  und  $Q_0 = Q \cap V \in \{W_0, W_1, W_2\}$  ist.

Wir nehmen jetzt an, daß  $Q_0 = W_2 \cong E(2^9)$  ist. Dann gilt offensichtlich  $Q_0 = [V, VE_1 X_1 \langle r_2 \rangle]$  und damit natürlich auch  $N' = Q_0 E_1 X_1$  sowie  $N \leq N' \cdot \langle ur_2 \rangle$ , wobei  $u \in \langle u_6 \rangle$  ist. Wir setzen  $Y_0 := Q_0 E_1 \cdot \langle r_2 r_3 d_2, r_2 s_2, s_1 t_2 \rangle$ ; dann ist  $Y_0$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $N'$ . Ferner gilt o.B.d.A.  $Y_0 \not\leq Y \not\leq Y_0 \cdot \langle ur_2 \rangle$ .

Nach (5.3) ist  $Q_0$  die einzige zu  $E(2^9)$  isomorphe Untergruppe von  $Y$ ; da wegen der Maximalität von  $N$  auch  $N = N_G(Q_0)$  gilt, ist  $Y \in \text{Syl}_2(G)$ .

Es sei nun  $F \in \text{Syl}_5(X_1) \leq \text{Syl}_5(N)$ . Aus (6.6) folgt unmittelbar  $C_N(F) = C_Q(F) = C_Q(X_1) = C_{Q_0}(X_1) = \langle \tilde{v} \rangle$  mit  $\tilde{v} = u_4 u_6 v_2$ ; ferner gilt  $C_N(\tilde{v}) = Q_0 X_1 \leq C_N(\tilde{v}) \leq Q_0 X_1 \langle u r_2 \rangle$ . Offensichtlich enthält  $C_N(\tilde{v})$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_G(\tilde{v})$ . Da  $\tilde{v} \in \text{ccl}_J(w_1)$  ist, enthält  $C_N(\tilde{v})$  außerdem eine Sylow 3-Untergruppe von  $C_G(\tilde{v})$ . Da  $C_G(\tilde{v})$  eine 2-lokale Untergruppe von  $G$  ist, welche eine Sektion isomorph zu  $\text{Alt}_6$  involviert, folgt aus dem bisherigen Beweis ferner, daß  $C_G(\tilde{v})$  eine  $\{2,3,5\}$ -Gruppe ist. Somit gilt  $C_G(\tilde{v}) = C_N(\tilde{v})$ . Insbesondere ist dann  $\langle \tilde{v} \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $C_G(F)$ . Mit (3.16) folgt  $Z_2 \times Z_5 \cong C_N(F) \leq C_G(F) \leq Z_2 \times \text{Sym}_3$  und damit  $q := |C_G(F) : C_N(F)| \in \{1,3\}$ . Da nach dem Frattini-Argument außerdem  $N_G(F) = C_G(F) N_N(F)$  gilt, erhalten wir nun  $|G : N| \equiv q \pmod{5}$ .

Da  $|N| \in \{2^{16} \cdot 3^2 \cdot 5, 2^{17} \cdot 3^2 \cdot 5\}$  ist, liefert eine Inspektion der Liste in (6.14) nun  $|G : N| \in \{3, 3 \cdot 7, 3 \cdot 11\}$ . Mit Hilfe von (1.21) und (1.20) erhalten wir dann schließlich  $|G : N| = 3 \cdot 7$ . Insbesondere ist also  $q = 1$  und damit  $N_G(F) = N_N(F)$ .

Es sei nun  $\Omega = \text{ccl}_G(N) - \{N\}$ . Da nach (1.20)  $G$  nicht 2-fach transitiv auf  $\text{ccl}_G(N)$  operiert, gilt dann offensichtlich  $(N \# \Omega) = 10 N_1 + 10 N_2$ . Dann ist  $3^2 \mid |N \cap N_1|$ ; da maximale Untergruppen von  $\text{Alt}_6$ , welche eine Sektion isomorph zu  $E(3^2)$  enthalten, isomorph zu  $E(3^2) \cdot Z_4$  sind und den Index 10 in  $\text{Alt}_6$  haben, folgt jetzt  $Q \not\leq N \cap N_1$  und somit  $Q_0 \leq O_2(N_1)$ . Dann ist aber offensichtlich  $Q_0 \not\leq N_1$  und damit  $N_1 = N$ ; dies ist jedoch unmöglich. Es ist also  $Q_0 \neq W_2$ .

Wir haben also gezeigt, daß  $W_0 \leq Q_0 \leq W_1$  ist. Ferner gilt  $VN' = V \cdot E_1 \cdot X_1 = V \cdot E_1 \cdot X_2$ . Dann gibt es ein Element  $v_0$  aus  $V$  mit  $v_0 r_0 \in Q$ . Da  $D := \langle r_2 r_3 d_2, r_2 r_2, s_1 t_2 \rangle$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $X_1$  ist, gibt es zu jedem  $d \in D$  ein  $v \in V$  mit  $vd \in N$ ; da  $[D, r_0] = \langle 1 \rangle$  ist, gilt dann  $vd \in C_N(v_0 r_0 \bmod Q_0)$  und somit  $[v_0, d] \in Q_0$ .

Mit Hilfe der Relationen in (3.2) verifizieren wir nun leicht, daß  $C_V(r_2 r_3 d_2) = \langle u_1, u_2, u_4, u_5, u_6 v_2, u_6 v_3 \rangle$  und  $[V, r_2 r_3 d_2] = \langle u_1, u_2, u_4, u_5 u_6 v_2 \rangle$  gilt, wobei außerdem  $r_2 r_3 d_2: u_3 \rightarrow u_1 u_3, v_1 \rightarrow u_1 u_2 v_1$  ist. Damit erhalten wir zunächst o.B.d.A.  $v_0 \in \langle u_4, u_5, u_6 v_2, u_6 v_3 \rangle$ . Außerdem gilt  $\langle u_4, u_6 v_2, u_5 u_6 v_3 \rangle \leq C_V(r_2 s_2)$  und  $[u_5, r_2 s_2] = u_4 \notin Q_0$ ; somit folgt also  $v_0 \in \langle u_4, u_6 v_2, u_5 u_6 v_3 \rangle$ . Wiederum mit (3.2) sehen wir, daß  $\langle u_4, u_6 v_2 \rangle \leq C_V(s_1 t_2)$  und  $[u_5 u_6 v_3, s_1 t_2] = u_6 v_2$  ist; damit folgt schließlich  $v_0 \in \langle u_4, u_6 v_2 \rangle$ . Wir beachten jetzt, daß  $y_1 = a_2 r_3 (a_0)^2$  ein Element der Ordnung drei aus  $X_1$  ist mit  $y_1: r_0 \rightarrow r_0 r_1 \rightarrow r_1, u_4 \rightarrow u_4, u_6 v_2 \rightarrow u_6 v_2$ . Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß  $y_1 \in N$  ist. Nun folgt offensichtlich  $v_0 = r_0 v_0 \cdot v_0 r_0 r_1 \cdot r_1 v_0 \in Q$  und damit  $v_0 \in Q \cap \langle u_4, u_6 v_2 \rangle = Q_0 \cap \langle u_4 u_6 v_2 \rangle \leq Q_0$ . Insbesondere ist dann  $r_0 \in Q$ . Da  $X_1$  irreduzibel auf  $E_1$  operiert und da  $[V, E_1] = W_0 \leq Q_0$  ist, folgt nun  $Q = Q_0 \cdot E_1$ .

Wir setzen jetzt  $Q_1 := \langle W_0, E_1 \rangle$ ; offensichtlich gilt  $E(2^8) \cong Q_1 \trianglelefteq Q \trianglelefteq Q_1 \cdot \langle v \rangle$  mit  $v = u_4 u_6 v_2$ . Ferner gilt  $C_{Q_1}(v) = [Q_1, \langle v \rangle] = W_0 \cong E(2^4)$ ; also ist  $Q_1$  die einzige zu  $E(2^8)$  isomorphe Untergruppe von  $Q$ . Da  $N$  eine maximale 2-lokale Untergruppe von  $G$  ist, folgt  $N = N_G(Q_1)$ . Wir setzen nun  $D := VE_1 X_1 \langle r_2 \rangle$  und  $\bar{D} := D/Q_1$ .



Offensichtlich gilt  $\text{Alt}_6 \cong \bar{N}' \leq \bar{N} \leq Z_2 \times \text{Sym}_6$  sowie  $Z(\bar{N}) \leq \langle \bar{v} \rangle \cong Z_2$ . Nun ist klar, daß  $C_{Q_1}(x_1) = [Q_1, x_1] \cong E(2^4)$  und  $C_{Q_1}(x_2) \leq E(2^6)$  ist für Involutionen  $x_1 \in Z(\bar{N}) \times \bar{N}'$  und  $x_2 \in \bar{N} - (Z(\bar{N}) \times \bar{N}')$ .

Ist nun  $E(2^8) = X \leq Y$  mit  $X \not\leq Q_1$ , so gilt offensichtlich  $Q_1 \cap X = Q_1 X / Q_1 \cong E(2^4)$ . Insbesondere ist dann  $\bar{N} \cong Z_2 \times \text{Sym}_6$  und  $Q_1 \cap X = C_{Q_1}(v) = W_0$ . Da  $Z(VE_1) = W_0$  und  $C_{W_0}(r_2 r_3 d_2) = \langle u_1, u_2 \rangle$  ist, erhalten wir jetzt einen Widerspruch. Also ist  $Q_1$  die einzige zu  $E(2^8)$  isomorphe Untergruppe von  $N$ . Insbesondere ist dann also  $Y$  eine Sylow 2-Untergruppe von  $G$  und  $Q_1$  schwach abgeschlossen in  $Y$  bzgl.  $G$ .

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß  $Y = N \cap VE_1 \cdot \langle D \times \langle r_2 \rangle \rangle$  ist; ferner sei  $Y_0 := Y \cap QN'$ . Nach (1.16) ist  $Q_1$  nicht stark abgeschlossen in  $Y$  bzgl.  $G$ . Nach (1.17) ist dann  $\Omega := \{ X \mid X \leq Y, X \not\leq Q_1, \exists g \in G : X^g \leq Q_1 \} \neq \emptyset$ . Es sei dann  $X$  ein Element maximaler Ordnung aus  $\Omega$ ; mit (1.17) erhalten wir jetzt  $Q_1 X / Q_1 \cong E(2^4)$ . Insbesondere gilt dann  $\bar{N} \cong Z_2 \times \text{Sym}_6$  und  $Q_1 \cap X \leq C_{Q_1}(v, r_2 r_3 d_2) = \langle u_1, u_2 \rangle$ . Da  $[u_2, s_1 t_2] = u_1$  ist, folgt  $VE_1 X = VE_1 \langle r_2 r_3 d_2, r_2 s_2, r_2 \rangle$ . Dann existiert also ein  $w \in C_V(r_2) = \langle u_1, u_2, u_3, v, u_4, u_6, v_2 \rangle$  mit  $w r_2 \in Q_1 X$ ; wir können offensichtlich o.B.d.A. annehmen, daß  $w \in \langle u_4, u_6, v_2 \rangle$  ist. Nun verifizieren wir mit Hilfe der Relationen aus (3.2) leicht, daß  $C_{Q_1}(w r_2) \cong E(2^6)$  ist sowie  $u_1 = [v_1, w r_2] \in [Q_1, w r_2] \cong E(2^2)$ . Mit (1.17) folgt jetzt zunächst  $X \cong E(2^6)$  und damit  $Q_1 \cap X = \langle u_1, u_2 \rangle$ ; dies wiederum impliziert nach (1.17) folgende Ungleichung:  $2^6 = |X| \geq |C_{Q_1}(w r_2)| \cdot |[Q_1, w r_2] \cap (Q_1 \cap X)| \geq 2^7$ . Damit ist das Lemma bewiesen.

Q.E.D.

(6.19) Lemma. Es sei  $N$  eine 2-lokale Untergruppe von  $G$  und  $Q = O_2(N)$ ; dann gilt folgendes:

(a) Ist  $N$  nichtauflösbar, so ist in  $N$  genau ein nichtabelscher einfacher Kompositionsfaktor  $F$  involviert;  $F$  ist isomorph zu  $\text{Alt}_5$  oder  $L_3(2)$ . Außerdem gilt  $\text{Alt}_5 \leq N/Q \leq \text{Sym}_3 \times \text{Sym}_5$  oder  $L_3(2) \leq N/Q \leq \text{Sym}_3 \times L_3(2)$ .

(b) Es ist  $\Pi(N) \subseteq \{2, 3, 5\}$  oder  $\Pi(N) \subseteq \{2, 3, 7\}$ .

(c) Ist  $N$  eine maximale nichtauflösbare 2-lokale Untergruppe von  $G$ , so ist  $N$  maximal in  $G$ .

Beweis. (a) Nach (6.9) ist  $\Pi(N) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ . Nach (5.1) ist  $N$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert. Ferner wissen wir, daß  $\text{Alt}_6$  nicht in  $N$  involviert ist. Nun liefert eine Inspektion der Untergruppen von  $M_{22}$ ,  $M_{24}$  und  $L_5(2)$ , daß nichtabelsche einfache Kompositionsfaktoren von  $N$  isomorph zu  $\text{Alt}_5$  oder  $L_3(2)$  sind; wir wenden nun (6.15) zusammen mit dem Frattini-Argument an und erhalten damit, daß es in  $N$  genau einen nichtabelschen einfachen Kompositionsfaktor gibt. Alle weiteren Aussagen in (a) ergeben sich nun trivialerweise aus der Struktur der  $p$ -lokalen Untergruppen in  $J$  für  $p \in \Pi(N)$  sowie der Struktur von  $\text{Aut}(\text{Alt}_5)$  und  $\text{Aut}(L_3(2))$ .

(b) Ist  $N$  nichtauflösbar, so folgt die Behauptung trivialerweise aus (a). Da nach (6.9)  $\Pi(N) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$  ist und nach (6.15) in  $N$  auch keine Sektion isomorph zu  $Z_5 \times Z_7$  involviert ist, gilt die Behauptung offensichtlich ebenso, falls  $N$  auflösbar ist.

(c) Es sei nun  $N$  eine maximale und nichtauflösbare 2-lokale Untergruppe von  $G$ ; ferner sei  $Q := O_2(N)$ . Wir wissen, daß  $|Q| \geq 2^5$  und damit  $|N|_2 \geq 2^7$  ist. Wir nehmen außerdem an, daß  $X$  eine maximale Untergruppe von  $G$  ist, welche  $N$  echt enthält.

Aus der Maximalität von  $N$  folgt  $O_2(X) = \langle 1 \rangle$ . Gilt nun  $Y := O(X) \neq \langle 1 \rangle$ , so ist wegen  $O(N) = \langle 1 \rangle$  offensichtlich  $Y \cap N = \langle 1 \rangle$ ; eine Inspektion der  $p$ -lokalen Untergruppen von  $J$  für  $2 \neq p \in \Pi(J)$  liefert  $Y \cong Z_3$ . Da  $C_G(Q) \leq Q$  ist, folgt jetzt  $Q_0 := C_Q(Y) < Q$  und außerdem  $N_0 := C_N(Y) < N$  mit  $|N : N_0| = |Q : Q_0| = 2$ ; folglich ist  $Q_0 = O_2(N_0)$  und somit  $\langle Y, N \rangle \leq N_G(Q_0)$ . Dies jedoch ist unmöglich, da  $N$  eine maximale 2-lokale Untergruppe in  $G$  ist. Es gilt also  $O_2(X) = O(X) = \langle 1 \rangle$ .

Es sei nun  $Y$  ein minimaler Normalteiler von  $X$ . Offensichtlich ist  $Y$  eine nichtabelsche einfache Gruppe mit  $Y \in \mathcal{K}$ . Da  $\text{Aut}(Y)/Y$  auflösbar ist, enthält  $C_X(Y) \times Y$  den nichtabelschen einfachen Kompositionsfaktor  $F$  von  $N$ . Da  $C_X(Y) \triangleleft X$  ist und da es in  $J$  keine Untergruppen isomorph zu  $\text{Alt}_5 \times L_3(2)$  gibt, folgt  $C_X(Y) = \langle 1 \rangle$ . Damit erhalten wir  $N < X \leq \text{Aut}(Y)$ ; ferner ist  $F$  in  $Y$  involviert.

Da offensichtlich  $N^\infty \leq Y$  ist, gilt dann insbesondere  $2^6 \mid |Y|$ . Da 2-lokale Untergruppen von  $Y$  auch höchstens  $\text{Alt}_5$  oder  $L_3(2)$  als nichtabelschen einfachen Kompositionsfaktor involvieren, liefert eine Inspektion der Liste in (4.1) nun, daß  $Y$  isomorph zu  $\text{Alt}_8$  oder  $L_3(4)$  ist. Da  $|Y| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$  sowie  $|Q| \geq 2^5$  und  $2^2 \mid |N/Q|$  gilt, folgt  $Y \triangleleft X \leq \text{Aut}(Y)$ . Da  $\text{Aut}(\text{Alt}_8) \cong \text{Sym}_8$  eine Untergrup

isomorph zu  $D_{14}$  enthält, folgt jetzt  $Y \cong L_3(4)$ . Dann ist offensichtlich  $N^\infty = N \cap Y \cong E(2^4) \cdot \text{Alt}_5$ . Da nach (4.4) ferner  $X/Y \leq \text{Sym}_3$  ist, folgt dann  $Z_2 \leq N/N^\infty \leq \text{Sym}_3$ ; jetzt erhalten wir  $N/O_2(N^\infty) \leq (Z_3 \times \text{Alt}_5) \cdot Z_2$  und damit auch  $O_2(N^\infty) = O_2(N) \cong E(2^4)$ , welches jedoch der Tatsache widerspricht, daß  $|Q| \geq 2^5$  ist. Wir haben damit also gezeigt, daß  $N$  eine maximale Untergruppe von  $G$  ist.

Q.E.D.

Mit den bisher gezeigten Methoden beweist man auch das folgende Resultat.

(6.20) Lemma. Ist  $N$  eine 2-lokale Untergruppe von  $G$ , so ist  $N$  auflösbar.

Um den Umfang der vorliegenden Arbeit in Grenzen zu halten, geben wir an dieser Stelle nur eine Skizze des Beweises von (6.20).

Man betrachtet eine maximale nichtauflösbare 2-lokale Untergruppe  $N$  von  $G$ , wobei o.B.d.A.  $O_2(N)$  von maximaler Ordnung ist. Mit Hilfe von Resultaten aus [68] und [76] zeigt man zunächst, daß  $N$  bereits eine Sylow 2-Untergruppe von  $G$  enthält. Dann reduziert man auf den Fall, daß  $N/O_2(N)$  isomorph zu  $\text{Alt}_5$ ,  $\text{Sym}_5$  oder  $L_3(2)$  ist. Ähnlich wie in vorhergehenden Teilen dieses Paragraphen bestimmt man jetzt die mögliche Struktur von  $O_2(N)$  und sichert dann die Existenz einer stark abgeschlossenen 2-Untergruppe in einer Sylowgruppe von  $G$ . Mit (1.16) folgt dann der gewünschte Widerspruch.

(6.21) Bemerkung. Der Beweis von Theorem (6.1) ergibt sich nun trivialerweise aus (6.20) und einem bekannten Resultat von D. Gorenstein und R. Lyons [27] .

# §7 MAXIMALE UNTERGRUPPEN VON J

In diesem Paragraphen werden wir nun schließlich die maximalen Untergruppen von  $J$  bestimmen.

(7.1) Lemma. Ist  $X$  eine maximale Untergruppe von  $J$ , so gilt genau eine der folgenden zwei Aussagen:

(1) Es gibt ein  $p \in \Pi(J)$  und eine  $p$ -Untergruppe  $P$  von  $J$  derart, daß  $X = N_J(P)$  ist.

(2) Die Gruppe  $X_0 := X^\infty$  ist nichtabelsch und einfach; ferner gilt  $X_0 \not\leq X \leq \text{Aut}(X_0)$ .

Beweis. Wir nehmen an, daß  $X$  eine nichtlokale maximale Untergruppe von  $J$  ist. Ferner sei  $N$  ein minimaler Normalteiler von  $X$ . Da  $N$  ein direktes Produkt von isomorphen nichtabelschen einfachen Gruppen ist und  $|J|_p = p$  gilt für  $p \in \Pi(J) \setminus \{2, 3, 11\}$ , folgt mit (4.1.b) nun offensichtlich, daß  $N$  eine nichtabelsche einfache Gruppe ist; ferner existiert ein  $q \in \{5, 7, 11\}$  mit  $q \in \Pi(N)$ . Da  $C_X(N)$  ein Normalteiler von  $X$  ist und  $X$  keine nichttrivialen auflösbaren Normalteiler besitzt, sehen wir mit Hilfe von (3.16), (3.17) und (3.18) nun leicht, daß  $C_X(N) = \langle 1 \rangle$  ist. Damit gilt also insbesondere  $N \leq X \leq \text{Aut}(N)$ . Mit (4.1) und (4.4) folgt nun offensichtlich  $N = X^\infty$  und somit die Behauptung.

Q.E.D.

(7.2) Lemma. In  $J$  gibt es jeweils genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen der folgenden Isomorphietypen :  $PSU_3(11)$  ,  $PTL_2(32)$  und  $PGL_2(23)$  . Ferner sind die Elemente dieser Klassen maximale Untergruppen von  $J$  .

Beweis. Die Existenz einer Untergruppe  $X \cong PGL_2(23)$  wurde von Z.Janko in [J] bewiesen. Ist  $Q \in Syl_{23}(X)$ , so gilt  $N_X(Q) = Q \cdot Y$  mit  $Y \cong Z_{22}$  ; ferner ist  $P := Y^2$  eine Sylow 11-Untergruppe von  $X$  mit  $N_X(P) = N_X(Y) \cong Z_{22} \cdot Z_2$  . Wir wissen ferner, daß  $N_J(P) \cong (F_{22} \times F_{22}) \cdot Z_5$  ist. Damit folgt also  $N_X(P) = N_X(Y) = O_5(N_J(Y))$  . Insbesondere ist dann  $X = \langle N_X(Q) , N_X(Y) \rangle$  durch Vorgabe von  $Q$  eindeutig bestimmt.

Mit den Ergebnissen aus §3 sehen wir leicht, daß in  $p$ -lokalen Untergruppen von  $J$  keine Sektionen isomorph zu  $U_3(11)$  ,  $L_2(32)$  oder  $PGL_2(23)$  involviert sind. Nun folgt die Behauptung mit (7.1) , (6.1) und (4.1) - (4.4) .

Q.E.D.

(7.3) Lemma. Die maximalen 2-lokalen Untergruppen  $H$  ,  $K$  ,  $L$  und  $M$  sind maximale Untergruppen von  $J$  .

Beweis. Nach (2.2), (2.6) sowie (4.1) und (4.4) sind die Gruppen  $L$  und  $M$  maximal in  $J$  .

Es sei nun  $N \in \{H, K\}$  und  $G$  eine maximale Untergruppe von  $J$  mit  $N \leq G$  . Nach Ergebnissen aus §3 werden nicht-triviale Untergruppen ungerader Ordnung in  $J$  nicht von Elementen aus  $Syl_2(J)$  normalisiert; somit gilt  $O(G) = \langle 1 \rangle$  .

Wir nehmen nun an, daß  $O_2(G) = \langle 1 \rangle$  ist. Nach (7.1) ist dann  $G_0 := G^\infty$  eine nichtabelsche einfache Gruppe derart, daß  $G_0 \triangleleft G \leq \text{Aut}(G_0)$  gilt. Offensichtlich ist  $N' = N^\infty \leq G_0$ , wobei in jedem Falle  $|N'|_2 = 2^{2^0}$  gilt. Dies widerspricht jedoch den Ergebnissen in (6.1) und (4.1). Wir haben also gezeigt, daß  $O_2(G) \neq \langle 1 \rangle$  ist. Mit (5.1) erhalten wir jetzt  $G = N$ .

Q.E.D.

(7.4) Lemma. Es sei  $p$  ein Element aus  $\{2, 3, 5, 7\}$  und  $q$  ein Element aus  $\{11, 29, 37, 43\}$ ; dann gilt folgendes:

(a) Jede  $p$ -lokale Untergruppe ist in  $J$  zu einer Untergruppe von  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert.

(b) Jede  $q$ -lokale Untergruppe von  $J$  ist in einem Sylow  $q$ -Normalisator von  $J$  enthalten; ferner sind die Sylow  $q$ -Normalisatoren maximal in  $J$ .

(c) Für  $r \in \{23, 31\}$  sind die Sylow  $r$ -Normalisatoren von  $J$  nicht maximal in  $J$ .

Beweis. Die Behauptung in (a) folgt unmittelbar aus (5.1) und (3.14) - (3.17). Mit (3.18) und (3.19) sehen wir leicht, daß  $q$ -lokale Untergruppen in Sylow  $q$ -Normalisatoren von  $J$  enthalten sind. Nach Resultaten in §3 normalisieren die Sylow  $q$ -Normalisatoren von  $J$  keine nichttriviale  $q'$ -Gruppe in  $J$ . Mit Hilfe von (7.1), (6.1) sowie (4.1) und (4.4) verifizieren wir nun leicht die Behauptung in (b).

Die Behauptung in (c) folgt direkt aus (7.2).

Q.E.D.



(7.5) Lemma. Ist  $L_5(2) \cong G \leq J$ , so ist  $G$  in  $J$  zu der Untergruppe  $L_0$  von  $L$  konjugiert.

Beweis. Es sei also  $L_5(2) \cong G \leq J$ . Bekanntlich hat  $G$  eine Untergruppe  $N \cong E(2^4) \cdot \text{Alt}_8$ . Es sei dann  $Q \in \text{Syl}_7(N)$ . Da  $Q \in \text{Syl}_7(G)$  ist mit  $N_G(Q) \cong \text{Sym}_3 \times F_{21}$  und da außerdem  $N_N(Q) \cong Z_2 \times F_{21}$  gilt, folgt aus der Maximalität von  $N$  in  $G$  nun offensichtlich  $G = \langle N, N_G(Q) \rangle = \langle N, C_G(Q) \rangle$ .

Nach (5.1) und (3.24) sowie (3.23) können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $N$  in  $L$  zu einem Element aus der Menge  $\{E_2A_2, E_2(A_2)^S, E_1A_1\}$  konjugiert ist; insbesondere ist also  $N \leq L$ . Wir können damit dann o.B.d.A. annehmen, daß  $O_2(N)$  ein Element aus  $\{E_1, E_2\}$  ist und daß  $Q = \langle q_0 \rangle$  ist.

Offensichtlich gilt  $N_N(Q) = \langle r_0 \rangle \times Q \cdot \langle a_0 \rangle$ . Ferner ist  $N_{L_0}(Q) = D \cdot \langle r_0 \rangle \times Q \cdot \langle a_0 \rangle \cong \text{Sym}_3 \times F_{21}$ , wobei  $D = \langle r_0 t_0 r_3 t_0 \rangle$  isomorph zu  $Z_3$  ist; außerdem gilt  $N_L(Q) = \langle v_1 \rangle \times N_{L_0}(Q)$ . Wir beachten ferner, daß  $Q \leq M$  ist mit  $C_M(Q) = Y \times Q$ , wobei  $Y = \langle v_1 r_0, \tilde{s}, d, r_0 \rangle \cong \text{Sym}_4$  ist mit geeigneten Elementen  $\tilde{s} \in U_0 \cdot s$  und  $d \in M - U$  derart, daß  $o(d) = 3$  sowie  $\langle d, r_0 \rangle \cong \text{Sym}_3$  gilt.

Wir beachten schließlich noch, daß  $C_J(Q) = Q \times X$  ist mit  $X \cong \text{Sym}_5$ . Außerdem gilt  $X \cap \text{ccl}_J(u_1) \leq X - X'$  sowie  $X \cap \text{ccl}_J(w_1) \leq X'$ . Wir wissen ferner, daß  $v_1 r_0 \in \text{ccl}_J(w_1)$  und  $\{r_0, v_1\} \leq \text{ccl}_J(u_1)$  ist. Somit operiert also  $\langle r_0 \rangle$  auf genau drei Sylow 3-Untergruppen von  $X$  invertierend; diese sind  $D$  sowie  $D_1 := \langle d \rangle$  und  $D_2 := \langle d^{v_1 r_0} \rangle$ , da in  $M \cap L$  ein Sylow 7-Normalisator isomorph zu  $E(2^2) \times F_{21}$  ist.

Um nachzuweisen, daß  $G$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $L$  konjugiert ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß es ein

Element  $i \in \{1, 2\}$  gibt mit  $C_G(Q) = D_i \cdot \langle r_0 \rangle \times Q$ . Also gilt dann insbesondere  $G = \langle N, D_i \rangle$ . Da sowohl  $D_i$  als auch die Gruppe  $V \cdot E_2 A_2 = V \cdot E_2 (A_2)^S$  in  $M$  enthalten ist, folgt dann o.B.d.A.  $N = E_1 A_1$ . Somit ist  $G_0 := G \cap M \cong \langle E_1 E_2 A_0, D_i \rangle$ . Da  $Q \in \text{Syl}_7(G_0)$  ist mit  $N_{G_0}(Q) \cong D_i \cdot \langle r_0 \rangle \times Q \cdot \langle a_0 \rangle$ , liefert eine Inspektion der maximalen Untergruppen von  $M_{24}$  nun den Widerspruch  $G_0 U/U \cong M_{24}$ .

Wir haben bisher also gezeigt, daß  $G$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $L$  konjugiert ist. Mit Hilfe von (1.1) sehen wir nun leicht, daß es in  $L$  genau eine Konjugiertenklasse von zu  $L_5(2)$  isomorphen Untergruppen gibt. Damit folgt die Behauptung des Lemmas.

Q.E.D.

(7.6) Lemma. Ist  $G$  eine Untergruppe von  $J$ , welche zu  $M_{23}$  oder  $M_{24}$  isomorph ist, so ist  $G$  in  $J$  zu einer Untergruppe von  $M$  konjugiert.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß  $M_{23} \cong G \leq J$  ist. Bekanntlich hat  $G$  eine maximale Untergruppe  $N \cong E(2^4) \cdot \text{Alt}_7$ . Es sei  $D \in \text{Syl}_3(N)$ . Dann gilt  $Z_4 \cong N_N(D)/D \leq N_G(D)/D \cong \text{SD}_{16}$ . Insbesondere ist also  $G = \langle N, N_G(D) \rangle$ .

Wir nehmen nun an, daß  $N$  in  $J$  nicht zu einer Untergruppe von  $M$  konjugiert ist. Nach (5.1) und (3.23) können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß  $N = E^* \cdot A \leq L$  ist mit einem geeigneten Element  $E^* \in \text{ccl}_L(E_1)$ ; wir können außerdem noch annehmen, daß  $D \in \text{Syl}_3(A)$  ist. Da  $\text{Alt}_7 \cong A \leq A_2 \leq M$  gilt, folgt aus (3.15) nun  $N_J(D) = N_M(D)$ . Insbesondere erhalten

wir damit  $G_0 := G \cap M \geq \langle A, N_G(D) \rangle$ . Eine Inspektion der maximalen Untergruppen von  $M_{23}$  liefert nun  $G_0 = G$  und damit den Widerspruch  $N \leq M$ .

Wir haben somit also gezeigt, daß o.B.d.A.  $N \leq M$  gilt. Mit (3.24) und (3.15) erhalten wir nun das gewünschte Resultat  $G \leq M$ .

Wir betrachten nun den Fall, daß  $M_{24} \cong G \leq J$  ist. Dann existiert eine Untergruppe  $G_0 \cong M_{23}$  in  $G$ . Offensichtlich können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $G_0 \leq M$  gilt. Für eine Sylow 3-Untergruppe  $D$  von  $G_0$  gilt nach (3.15) außerdem  $E(3^2) \cdot \text{SD}_{16} \cong N_{G_0}(D) \leq N_J(D) = N_M(D)$ . Da  $G_0$  maximal in  $G$  ist, gilt dann offensichtlich  $G = \langle G_0, N_G(D) \rangle \leq M$ .

Q.E.D.

(7.7) Lemma. (a) Es sei  $L_2(23) \cong G \leq J$  derart, daß  $G \cap \text{ccl}_J(u_1) \neq \emptyset$  ist. Dann ist  $N_J(G) \cong \text{PGL}_2(23)$ ; ferner existiert ein  $P \in \text{Syl}_{23}(G)$  und ein  $X \in \text{ccl}_J(M)$  derart, daß  $G = X \cap X^t$  ist mit einer Involution  $t$  aus  $N_J(P)$ .

(b) Es sei  $Z_{11} = Y \leq M$ . Dann ist  $Y$  in genau 11  $J$ -Konjugierten von  $M$  enthalten; ist  $M \neq X \in \text{ccl}_J(M)$  mit  $Y \leq M \cap X$ , so gilt  $M \cap X \cong L_2(23)$ .

Beweis. Es sei also  $L_2(23) \cong G \leq J$  und  $P \in \text{Syl}_{23}(G)$ . Dann ist  $N_G(P) = P \cdot Y$  mit  $Y \cong Z_{11}$  sowie  $N_G(Y) = Y \cdot \langle j \rangle$  und  $j \in \text{ccl}_J(u_1)$ . Ferner gilt  $G = \langle P, Y, j \rangle$ .

Wir beachten nun, daß  $N_J(Y) = (Y_0 \cdot \langle y \rangle \times Y \cdot \langle z \rangle) \cdot F$  mit  $F \cong Z_5$ ,  $Y_0 = Z_{11}$  sowie  $y \cdot \langle z \rangle \leq \text{ccl}_J(w_1)$  und  $z \in \text{ccl}_J(u_1)$  ist. Damit folgt also  $Y \cdot \langle j \rangle = Y \cdot \langle z \rangle$ ; insbesondere ist  $G$

dann eindeutig bestimmt. Mit (4.11) sehen wir jetzt leicht, daß  $G$  in einem  $J$ -Konjugierten  $X$  von  $M$  enthalten ist. Da  $N_J(P) = P \cdot (Y \times \langle t \rangle)$  mit  $t \in \text{ccl}_J(w_1)$ , normalisiert  $t$  offensichtlich auch  $Y \cdot \langle j \rangle$  und damit auch  $G$ . Also gilt  $X \cap X^t \geq G$ . Da  $L_2(23)$ -Untergruppen maximal in  $M_{24}$  sind, folgt schließlich  $X \cap X^t = G$  und  $G \cdot \langle t \rangle \cong \text{PGL}_2(23)$ . Damit ist die Behauptung in (a) bewiesen.

Ist nun  $Z_{11} \cong Y \leq M$ , so kontrolliert  $N_J(Y)$  die Fusion der Elemente aus  $\text{ccl}_J(M)$ , welche  $Y$  enthalten. Da  $N_M(Y)$  isomorph zu  $Z_2 \times Z_{11} \cdot Z_{10}$  ist, gibt es also genau 11 Elemente in  $\text{ccl}_J(M)$ , welche  $Y$  enthalten. Nach (a) wissen wir, daß es ein  $X \in \text{ccl}_J(M)$  gibt mit  $L_2(23) \cong M \cap X \geq Y$ . Offensichtlich hat  $X$  unter  $N_M(Y)$  genau 10 Konjugierte; damit folgt dann auch die Behauptung in (b).

Q.E.D.

(7.8) Notation. Es sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $a, b, x, y$  und  $g$  seien Elemente aus  $G$ . Wir sagen dann, daß  $(x, y)$  ein  $g$ -Paar vom Typ  $(a, b)$  ist, falls  $x \in \text{ccl}_G(a)$ ,  $y \in \text{ccl}_G(b)$  und  $x \cdot y \cdot g = 1$  ist. Gilt  $o(a) = k$  und  $o(b) = 1$ , so sagen wir auch, daß  $(x, y)$  ein  $g$ -Paar vom Typ  $(k, 1)$  ist. Ferner sagen wir, daß die Gruppe  $X$  von dem  $g$ -Paar  $(x, y)$  erzeugt wird, falls  $X = \langle x, y \rangle$  gilt.

Wir beachten, daß die Anzahl der  $g$ -Paare vom Typ  $(a, b)$  in  $G$  gegeben ist durch  $\tau_G(a, b; g) = \zeta_G(a, b, g) \cdot |C_G(g)|$ . Ist  $o(a) = k$  und  $o(b) = 1$ , so schreiben wir gelegentlich an Stelle von  $\tau_G(a, b; g)$  auch  $\tau_G(k, 1; g)$ , sofern Mißverständnisse ausgeschlossen sind.

(7.9) Lemma. Es sei  $g$  ein Element der Ordnung 11 in der endlichen Gruppe  $G$ . Dann gilt folgendes:

(a) Ist  $G$  isomorph zu  $L_2(11)$ ,  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  oder  $M_{23}$ , so gilt  $\tau_G(2,3;g) = 11$ ; ferner erzeugen zwei  $g$ -Paare vom Typ  $(2,3)$  aus  $G$  stets die gleiche zu  $L_2(11)$  isomorphe Untergruppe von  $G$ .

(b) Ist  $G \cong L_2(23)$ , so gilt  $\tau_G(2,3;g) = 22$ ; außerdem erzeugt jedes  $g$ -Paar vom Typ  $(2,3)$  die Gruppe  $G$ .

Beweis. (a) Mit Hilfe der Charaktertafel von  $G$  berechnen wir zunächst  $\tau_G(2,3;g) = 1$ ; da  $C_G(g) = \langle g \rangle$  ist und da es in  $G$  genau eine Klasse von Involutionen sowie genau eine Klasse von Elementen der Ordnung drei gibt, folgt die Behauptung nun aus der Tatsache, daß es in  $G$  stets eine zu  $L_2(11)$  isomorphe Untergruppe gibt.

(b) Mit einfacher Rechnung folgt aus der Charaktertafel von  $G$ , daß  $\tau_G(2,3;g) = 2$  gilt. Da  $C_G(g) = \langle g \rangle$  ist und da  $G$  eine minimale nichtabelsche einfache Gruppe ist, folgt schließlich auch das gewünschte Resultat in (b).

Q.E.D.

(7.10) Lemma. Es sei  $Z_{11} \cong \langle g \rangle \trianglelefteq G \cong M_{12}$ . Für  $p \in \{2, 3\}$  sei  $pA$  bzw.  $pB$  ein Repräsentant der  $G$ -Klasse von  $p$ -zentralen bzw. nicht- $p$ -zentralen Elementen der Ordnung  $p$  in  $G$ . Dann gilt  $\tau_G(x,y;g) = 11$  für  $x \in \{2A, 2B\}$  und  $y \in \{3A, 3B\}$ . Die  $g$ -Paare vom Typ  $(2A, 3B)$  oder  $(2B, 3A)$  erzeugen jeweils  $G$ , während die  $g$ -Paare vom Typ  $(2A, 3A)$  die gleiche nicht-maximale zu  $L_2(11)$  isomorphe Untergruppe von  $G$  erzeugen;

die  $g$ -Paare vom Typ  $(2B, 3B)$  erzeugen die gleiche maximale zu  $L_2(11)$  isomorphe Untergruppe von  $G$ .

Beweis. Einer Arbeit von J. McKay [40] entnimmt man, daß es genau 11  $g$ -Paare eines jeden möglichen Types in  $G$  gibt. Wir beachten ferner, daß für  $M_{11} \cong X \leq G$  die Elemente der Ordnung  $p$  aus  $X$  in  $G$  stets  $p$ -zentral sind; außerdem operieren maximale Untergruppen  $Y \cong L_2(11)$  von  $G$  transitiv auf  $\text{ccl}_G(X)$ , d.h. es gilt  $X \cap Y \cong F_{55}$ . Mit (7.9) erhalten wir jetzt die Behauptung.

Q.E.D.

(7.11) Lemma. Es sei  $Z_{11} \cong \langle g \rangle \leq G \cong M_{24}$ ; ferner seien für  $p \in \{2, 3\}$  Elemente  $pA$  und  $pB$  ähnlich wie in (7.10) definiert. Dann gilt folgendes:

(a) Es ist  $\tau_G(2A, 3A; g) = 11$  und jedes  $g$ -Paar vom Typ  $(2A, 3A)$  erzeugt die gleiche Untergruppe  $X \cong L_2(11)$  von  $G$ ; ferner ist  $X$  in Untergruppen von  $G$  enthalten, welche zu  $M_{11}$  oder  $M_{22}$  isomorph sind.

(b) Es ist  $\tau_G(2A, 3B; g) = \tau_G(2B, 3A; g) = 11$  und jedes  $g$ -Paar vom Typ  $(2A, 3B)$  oder  $(2B, 3A)$  erzeugt die gleiche Untergruppe  $X \cong M_{12}$  von  $G$ .

(c) Es gilt  $\tau_G(2B, 3B; g) = 121$ . Es gibt genau 11  $g$ -Paare vom Typ  $(2B, 3B)$ , welche jeweils die gleiche Untergruppe  $X \cong L_2(11)$  erzeugen; die restlichen 110  $g$ -Paare vom Typ  $(2B, 3B)$  zerfallen in 5 Familien von jeweils 22 Paaren, welche die gleiche Untergruppe  $Y_i \cong L_2(23)$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) erzeugen. Die Gruppe  $X$  ist maximal in einer  $M_{12}$ -Untergruppe von  $G$ .

Beweis. Mit Hilfe der Charaktertafel von  $M_{24}$  berechnet man leicht die verallgemeinerten Strukturkonstanten für die Tripel  $(x,y,g)$  mit  $x \in \{2A, 2B\}$  und  $y \in \{3A, 3B\}$ ; wegen  $C_G(g) = \langle g \rangle$  erhalten wir unmittelbar die angegebenen Werte für die möglichen  $\tau_G(x,y;g)$ .

Ist  $\langle g \rangle \leq X \leq G$ , so kontrolliert  $N_G(\langle g \rangle)$  die Fusion der Elemente aus  $\text{cccl}_G(X)$ , welche  $\langle g \rangle$  enthalten. Außerdem beachten wir, daß für  $p \in \{2,3\}$  und  $M_{12} \cong Y \leq G$  die  $p$ -zentralen Elemente der Ordnung  $p$  aus  $Y$  auch  $p$ -zentral in  $G$  sind und die nicht- $p$ -zentralen Elemente der Ordnung  $p$  aus  $Y$  in  $G$  auch nicht- $p$ -zentral sind. Eine Inspektion der Sylow 11-Normalisatoren in  $L_2(11)$ ,  $M_{12}$ ,  $L_2(23)$  und  $G$  liefert dann zusammen mit (7.9) und (7.10) die weiteren Aussagen des Lemmas.

Q.E.D.

(7.12) Lemma. Es sei  $Z_{11} \cong \langle g \rangle \leq M$ . Dann gibt es genau 605  $g$ -Paare  $(x,y)$  vom Typ  $(2,3)$  in  $M$  derart, daß  $(x,y)$  ein  $g$ -Paar vom Typ  $(x_2, x_4)$  in  $J$  ist; von diesen erzeugen genau 220 Paare eine zu  $L_2(23)$  isomorphe Untergruppe von  $M$ . Außerdem gibt es genau 715  $g$ -Paare vom Typ  $(2,3)$  in  $M$ , welche in  $J$  vom Typ  $(x_3, x_4)$  sind.

Beweis. Wir setzen  $\bar{M} = M/U$ . Ferner sei  $(x,y)$  ein  $g$ -Paar vom Typ  $(2,3)$  in  $M$  und  $X = \langle x, y \rangle$ . Offensichtlich ist  $(\bar{x}, \bar{y})$  ein  $\bar{g}$ -Paar vom Typ  $(2,3)$  in  $\bar{M}$ . Wir benutzen die Bezeichnungsweise von (7.11) für die vier möglichen Typen von  $\bar{g}$ -Paaren vom Typ  $(2,3)$  in  $\bar{M}$ .

Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $\bar{X}$  nicht isomorph ist zu  $L_2(23)$ . Nach (7.11) können wir dann o.B.d.A. annehmen, daß es eine Untergruppe  $N_1$  von  $M$  gibt mit  $U \leq N_1$  und  $\bar{X} \leq \bar{N}_1 \cong M_{12}$ . In (4.11) haben wir bereits gesehen, daß dann  $N := (N_1)' \cong E(2^{10}) \cdot M_{12}$  ist mit  $Q := N \cap U \cong E(2^{10})$ . Offensichtlich enthält  $X$  keine Untergruppe vom Index zwei; also gilt  $X \leq N$ . Ferner operiert in jedem Falle  $X$  irreduzibel auf  $Q$ . Da  $\alpha(y) = 3$  ist, folgt  $Q_0 := [Q, y] = [U, y]$ ; außerdem gilt  $Q_1 := [Q, x] \leq Q_2 := C_Q(x) \cong E(2^6)$ . Da sowohl  $Q_0 Q_1$  als auch  $Q_0 Q_2$  eine  $X$ -invariante Untergruppe von  $Q$  ist, erhalten wir  $Q = Q_0 Q_1 = Q_0 Q_2$ .

Mit (4.11) und (7.9) - (7.11) sehen wir nun leicht, daß es umgekehrt zu jedem  $\bar{g}$ -Paar  $(\bar{x}, \bar{y})$  aus  $\bar{M}$  in der Tat ein  $g$ -Paar  $(a, b)$  vom Typ  $(2, 3)$  in  $M$  und damit in  $N$  gibt derart, daß  $\bar{a} = \bar{x}$  und  $\bar{b} = \bar{y}$  gilt. Offensichtlich sind dann sämtliche  $g$ -Paare  $(a, b)$  vom Typ  $(2, 3)$  aus  $N$  mit  $\bar{a} = \bar{x}$  und  $\bar{b} = \bar{y}$  von der Form  $(xu, uy)$  mit  $u \in Q_0 \cap Q_2$ . Somit existieren also zu einem  $\bar{g}$ -Paar  $(\bar{x}, \bar{y})$  vom Typ  $(2, 3)$  aus  $\bar{N}$  genau  $|Q_0 \cap Q_2| = |Q_0| \cdot |Q_2| / 2^{10}$  verschiedene Urbilder, welche  $g$ -Paare vom Typ  $(2, 3)$  in  $N$  sind.

Wir beachten, daß  $a_1$  ein 3-zentrales Element und  $a_6$  ein nicht-3-zentrales Element der Ordnung drei aus  $M$  ist, wobei  $C_U(a_1) \cong E(2^5)$  und  $C_U(a_6) = \langle u_1, u_2, u_4 \rangle \cong E(2^3)$  gilt.

Wir nehmen nun an, daß  $(\bar{x}, \bar{y})$  vom Typ  $(2A, 3A)$  in  $\bar{M}$  ist. Dann gilt  $Q_0 \cap Q_2 \cong E(2^2)$  und  $Q_0 \cap Q_1 = \langle 1 \rangle$ . Außerdem ist  $Q_1 = [U, x]$ ; mit (4.11) und (3.8) folgt nun, daß von den vier möglichen Urbildern von  $(\bar{x}, \bar{y})$  genau eines ein  $g$ -Paar vom Typ  $(x_2, x_4)$  in  $J$  ist und genau drei  $g$ -Paare vom Typ  $(x_1, x_4)$  in



J sind.

Jetzt sei  $(\bar{x}, \bar{y})$  vom Typ (2A, 3B) in  $\bar{M}$ . Dann gilt  $Q_0 \cap Q_2 \cong E(2^4)$  und  $Q_0 \cap Q_1 \cong E(2^2)$ . Also existieren genau vier Urbilder von  $(\bar{x}, \bar{y})$ , welche g-Paare vom Typ  $(x_2, x_4)$  in J sind, und genau 12 Urbilder von  $(\bar{x}, \bar{y})$ , welche vom Typ  $(x_3, x_4)$  in J sind.

Es sei nun  $(\bar{x}, \bar{y})$  vom Typ (2B, 3A) in  $\bar{M}$ . Dann gilt  $Q_0 \cap Q_2 \cong E(2^2)$  sowie  $Q_0 \cap Q_1 = \langle 1 \rangle$ ; da  $Q_2 = C_U(x)$  ist, gilt ferner  $[U, x] \cap Q_0 \cong Z_2$ . Mit (3.8) und (4.11) sehen wir nun, daß es jeweils genau zwei g-Paare vom Typ  $(x_2, x_4)$  bzw. vom Typ  $(x_3, x_4)$  gibt, welche Urbilder von  $(\bar{x}, \bar{y})$  sind.

Schließlich sei  $(\bar{x}, \bar{y})$  vom Typ (2B, 3B) in  $\bar{M}$ . Dann gilt  $Q_0 \cap Q_2 \cong E(2^4)$  und  $[U, x] \cap Q_0 \cong E(2^3)$ . Nach (3.8) und (4.11) gibt es dann jeweils genau acht Urbilder von  $(\bar{x}, \bar{y})$ , welche vom Typ  $(x_2, x_4)$  bzw. vom Typ  $(x_3, x_4)$  in J sind.

Wir betrachten nun den Fall, daß  $\bar{X} \cong L_2(23)$  ist. Dann ist  $(\bar{x}, \bar{y})$  vom Typ (2B, 3B) in  $\bar{M}$ . Da X irreduzibel auf U operiert, gilt für  $Q_0 := [U, y]$  und  $Q_2 := C_U(x)$  dann ähnlich wie im ersten Fall  $Q_0 Q_2 = [U, X] = U$ . Ebenso sehen wir wieder mit (3.8) und (4.11), daß es genau vier g-Paare vom Typ  $(x_2, x_4)$  und genau vier g-Paare vom Typ  $(x_3, x_4)$  gibt, welche Urbilder von  $(\bar{x}, \bar{y})$  sind.

Mit (7.11) folgt nun unmittelbar, daß es in M genau  $11 \cdot 55 = 605$  g-Paare vom Typ (2, 3) gibt, welche in J den Typ  $(x_2, x_4)$  haben; ferner existieren genau  $11 \cdot 65 = 715$  g-Paare vom Typ (2, 3) in M, welche in J vom Typ  $(x_3, x_4)$  sind.

Mit (7.7) und (7.9) verifizieren wir nun leicht, daß es in  $M$  genau 220  $g$ -Paare  $(x, y)$  vom Typ  $(2, 3)$  gibt, welche in  $J$  den Typ  $(x_2, x_4)$  haben und welche eine zu  $L_2(23)$  isomorphe Untergruppe von  $M$  erzeugen.

Q.E.D.

(7.13) Lemma. (a) Es sei  $g$  ein nicht-11-zentrales Element der Ordnung 11 aus  $J$ , also  $g \in \text{ccl}_J(x_{20})$ . Ist  $(x, y)$  ein  $g$ -Paar vom Typ  $(x_2, x_4)$  aus  $J$ , so ist  $\langle x, y \rangle$  in einem  $J$ -Konjugierten von  $M$  enthalten.

(b) Ist  $L_2(11) \cong X \leq J$  derart, daß  $X$  nicht in einem  $J$ -Konjugierten von  $H$  oder  $M$  enthalten ist, so gilt für  $X$  das Fusionsschema (II) aus (4.18).

(c) Ist  $M_{12} \cong X \leq J$ , so ist  $X$  in einem  $J$ -Konjugierten von  $M$  enthalten.

Beweis. Es sei  $(x, y)$  ein  $g$ -Paar vom Typ  $(x_2, x_4)$  mit  $X = \langle x, y \rangle \cong L_2(23)$ . Offensichtlich ist  $\langle g \rangle$  in genau 55  $J$ -Konjugierten von  $X$  enthalten; nach (7.7) können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $X \leq M$  ist. Mit Hilfe von (7.9), (7.12) sowie (7.7) verifizieren wir nun leicht, daß es in  $J$  genau  $55 \cdot 22 + 11 \cdot (605 - 220) = 11 \cdot 495$   $g$ -Paare vom Typ  $(x_2, x_4)$  gibt derart, daß das Erzeugnis eines jeden Paares in  $J$  zu einer Untergruppe von  $M$  konjugiert ist.

Mit Hilfe der Charaktertafel von  $J$  berechnen wir nun  $\zeta_G(x_2, x_4, x_{20}) = 45/2$ ; da  $C_G(g) \cong Z_{11} \times F_{22}$  ist, folgt die Behauptung in (a). Die weiteren Aussagen in (b) und (c) folgen nun aus (4.18), (4.20), (7.9) und (7.10).

Q.E.D.

(7.14) Lemma. Es sei  $Z_{11} = \langle g \rangle \leq J$  mit  $g \notin \text{cccl}_J(x_{20})$ . dann gibt es genau  $11^2 \cdot 90$   $g$ -Paare  $(x, y)$  vom Typ  $(x_3, x_4)$  in  $J$  derart, daß  $\langle x, y \rangle$  in keinem  $J$ -Konjugierten von  $M$  enthalten ist; außerdem ist  $\langle x, y \rangle$  dann isomorph zu  $L_2(11)$ ,  $L_2(23)$  oder  $J$ .

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß  $Y = \langle g \rangle \leq M$  gilt. Mit (7.7) und (7.12) sehen wir zunächst, daß es genau  $11^2 \cdot 65$   $g$ -Paare vom Typ  $(x_3, x_4)$  in  $J$  gibt derart, daß das Erzeugnis eines jeden Paares in einem  $J$ -Konjugierten von  $M$  enthalten ist. Nun berechnen wir  $\zeta_G(x_3, x_4, x_{20}) = 155/2$ . Da  $C_J(Y) = E(11^2) \cdot Z_2$  ist, gibt damit also genau  $11^2 \cdot 90$   $g$ -Paare  $(x, y)$  vom Typ  $(x_3, x_4)$  derart, daß  $X = \langle x, y \rangle$  nicht in einem  $J$ -Konjugierten von  $M$  enthalten ist.

Da  $X$  in keiner  $p$ -lokalen Untergruppe von  $J$  enthalten ist ( $p \in \Pi(J)$ ), ist  $X$  dann offensichtlich eine einfache Untergruppe von  $J$ . Da die  $U_3(11)$ -Untergruppen von  $J$  nur 2-zentrale Involutionen von  $J$  enthalten, folgt mit (4.1), (7.6) und (7.9) sowie (7.13) nun die Behauptung.

Q.E.D.

Bezeichnen wir für eine nichtabelsche einfache Gruppe  $Y$  mit  $Y^*$  eine Gruppe derart, daß  $Y \trianglelefteq Y^* \leq \text{Aut}(Y)$  ist, so können wir die bisherigen Resultate im wesentlichen in der folgenden Form zusammenfassen.

(7.15) THEOREM. Ist  $X$  eine maximale Untergruppe von  $J$ , so liegt einer der folgenden Fälle vor:

(1)  $X$  ist 2-lokal und in  $J$  zu einer der Gruppen  $H, K, L$  oder  $M$  konjugiert.

(2)  $X$  ist ein Sylow  $p$ -Normalisator von  $J$  mit einer Primzahl  $p$  aus  $\{11, 29, 37, 43\}$ .

(3)  $X$  ist isomorph zu  $\text{PGL}_2(23)$ ,  $\text{PTL}_2(32)$  oder  $\text{PEU}_3(11)$ ; ferner gibt es von jedem Isomorphietyp jeweils genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen in  $J$ .

(4)  $X$  ist isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

(a)  $(\text{Alt}_5)^*$ ,  $(\text{Alt}_6)^*$ ,  $\text{Alt}_7$ ,  $\text{Alt}_8$ ,  $L_3(2)$ ,  $L_3(4)^*$ ;

(b)  $L_2(11)^*$ ,  $L_2(23)$ ,  $M_{11}$ ,  $(M_{22})^*$ ;

(c)  $U_3(3)$ .

Dabei ist  $L_3(4)^* \leq \text{PGL}_3(4) \cdot \langle \varphi \rangle$ , wobei  $\varphi$  ein vom Körperautomorphismus der  $\text{GL}_3(4)$  induzierter involutorischer Automorphismus von  $L_3(4)$  ist.

Beweis. Man konsultiere (7.1) - (7.6), (6.1), (4.1) und (4.4) sowie (7.13).

Q.E.D.

Abschließend sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Existenz einer zu  $U_3(3)$  isomorphen Untergruppe in  $J$  noch nicht bewiesen wurde. Ferner gibt es Untergruppen eines jeden der in (4a) und (4b) aufgelisteten Isomorphie-typen; diese sind jedoch nicht notwendigerweise maximal in  $J$ . Außerdem scheint es möglich, mit Hilfe einer verfeinerten Methode der Strukturkonstantenrechnung die Fälle unter (4b) endgültig zu lösen; wesentlich komplizierter dürfte die Lage für Gruppen in (4a) sein, da deren lokale Struktur vergleichsweise dünn ist und außerdem keine 'großen' Prim-teiler vorhanden sind.

§A      ANHANG

Zur Bequemlichkeit des Lesers stellen wir in diesem Paragraphen einige Tabellen und Charaktertafeln zusammen, welche im Verlauf der Arbeit benutzt worden sind.

Die Charaktertafeln finden sich in einer Arbeit von J. McKay [40] und D.G. James [36] ; dort findet man auch weitere Hinweise zur Benutzung der Tafeln.



Tab. 1 (Fortsetzung)

|   |   |    |    |    |    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---|---|----|----|----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 3 | 7 | 23 | 29 | 31 | 37 | 859  | 387  | 774  | 217  | 434  | 868  | 405  | 810  | 289  | 578  | 1156 |
| 1 | 7 | 23 | 29 | 31 | 37 | 730  | 129  | 258  | 516  | 1032 | 733  | 135  | 270  | 540  | 1080 | 809  |
| 3 | 1 | 23 | 29 | 31 | 37 | 503  | 1006 | 481  | 31   | 62   | 124  | 248  | 496  | 992  | 657  | 1306 |
| 1 | 1 | 23 | 29 | 31 | 37 | 1055 | 779  | 227  | 454  | 908  | 485  | 970  | 609  | 1218 | 1105 | 879  |
| 3 | 7 | 1  | 29 | 31 | 37 | 1079 | 827  | 323  | 646  | 1292 | 1253 | 1175 | 1619 | 767  | 83   | 166  |
| 1 | 7 | 1  | 29 | 31 | 37 | 1247 | 1163 | 995  | 659  | 1318 | 1305 | 1279 | 1227 | 1123 | 915  | 499  |
| 3 | 1 | 1  | 29 | 31 | 37 | 1295 | 1259 | 1187 | 1043 | 755  | 179  | 358  | 716  | 101  | 202  | 464  |
| 1 | 1 | 1  | 29 | 31 | 37 | 1319 | 1307 | 1283 | 1235 | 1139 | 947  | 543  | 1126 | 921  | 511  | 1022 |
| 3 | 7 | 23 | 1  | 31 | 37 | 305  | 610  | 1220 | 1109 | 887  | 443  | 886  | 441  | 882  | 433  | 866  |
| 1 | 7 | 23 | 1  | 31 | 37 | 989  | 647  | 1294 | 1257 | 1183 | 1035 | 739  | 147  | 294  | 588  | 1176 |
| 3 | 1 | 23 | 1  | 31 | 37 | 614  | 1228 | 1125 | 919  | 507  | 1014 | 697  | 63   | 126  | 252  | 504  |
| 1 | 1 | 23 | 1  | 31 | 37 | 1092 | 853  | 375  | 750  | 169  | 338  | 676  | 21   | 42   | 84   | 168  |
| 3 | 7 | 1  | 1  | 31 | 37 | 129  | 258  | 516  | 1032 | 733  | 135  | 270  | 540  | 1080 | 809  | 327  |
| 1 | 7 | 1  | 1  | 31 | 37 | 43   | 86   | 172  | 344  | 688  | 45   | 90   | 180  | 360  | 720  | 105  |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 31 | 37 | 779  | 227  | 454  | 908  | 485  | 970  | 609  | 1218 | 1105 | 879  | 427  |
| 1 | 7 | 23 | 29 | 1  | 37 | 1147 | 963  | 595  | 1197 | 1049 | 767  | 203  | 406  | 812  | 293  | 586  |
| 3 | 1 | 23 | 29 | 1  | 37 | 500  | 1000 | 669  | 7    | 14   | 28   | 56   | 112  | 224  | 448  | 896  |
| 1 | 1 | 23 | 29 | 1  | 37 | 1054 | 777  | 223  | 446  | 892  | 453  | 906  | 481  | 962  | 597  | 1186 |
| 3 | 7 | 1  | 1  | 31 | 37 | 832  | 333  | 666  | 13   | 2    | 4    | 8    | 16   | 32   | 64   | 128  |
| 1 | 7 | 1  | 1  | 31 | 37 | 721  | 111  | 222  | 444  | 888  | 445  | 890  | 449  | 892  | 445  | 893  |
| 3 | 7 | 1  | 29 | 1  | 37 | 1277 | 1143 | 955  | 579  | 1158 | 985  | 639  | 1278 | 1225 | 1116 | 907  |
| 1 | 7 | 1  | 29 | 1  | 37 | 856  | 381  | 762  | 193  | 386  | 772  | 213  | 426  | 852  | 372  | 746  |
| 3 | 1 | 1  | 29 | 1  | 37 | 557  | 1114 | 697  | 463  | 926  | 521  | 1042 | 753  | 175  | 350  | 700  |
| 1 | 1 | 1  | 29 | 1  | 37 | 1073 | 815  | 299  | 598  | 1196 | 1061 | 791  | 251  | 502  | 1004 | 677  |
| 3 | 7 | 23 | 1  | 1  | 37 | 568  | 1136 | 941  | 551  | 1102 | 873  | 415  | 836  | 329  | 658  | 1316 |
| 1 | 7 | 23 | 1  | 1  | 37 | 623  | 1266 | 1201 | 1071 | 811  | 291  | 582  | 1164 | 957  | 663  | 1326 |
| 3 | 1 | 23 | 1  | 1  | 37 | 1222 | 1113 | 895  | 459  | 919  | 505  | 1010 | 689  | 47   | 94   | 188  |
| 1 | 1 | 23 | 1  | 1  | 37 | 851  | 371  | 742  | 153  | 306  | 612  | 1224 | 1117 | 903  | 475  | 950  |
| 3 | 7 | 1  | 1  | 1  | 37 | 777  | 223  | 446  | 892  | 453  | 906  | 481  | 962  | 593  | 1186 | 1041 |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 37 | 259  | 518  | 1036 | 741  | 151  | 302  | 604  | 1208 | 1085 | 839  | 347  |
| 3 | 7 | 1  | 1  | 1  | 37 | 111  | 222  | 444  | 888  | 445  | 890  | 449  | 898  | 445  | 893  | 529  |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 37 | 37   | 74   | 148  | 296  | 592  | 1184 | 1037 | 743  | 155  | 310  | 620  |
| 3 | 7 | 23 | 29 | 31 | 1  | 311  | 622  | 1244 | 1157 | 983  | 635  | 1270 | 1209 | 1087 | 843  | 355  |
| 1 | 7 | 23 | 29 | 31 | 1  | 991  | 651  | 1302 | 1273 | 1215 | 1099 | 867  | 403  | 806  | 281  | 562  |
| 3 | 1 | 23 | 29 | 31 | 1  | 805  | 279  | 558  | 1116 | 901  | 471  | 942  | 552  | 1106 | 881  | 421  |
| 1 | 1 | 23 | 29 | 31 | 1  | 712  | 93   | 186  | 372  | 744  | 157  | 314  | 628  | 1256 | 1181 | 1031 |
| 3 | 7 | 1  | 29 | 31 | 1  | 245  | 490  | 980  | 629  | 1258 | 1185 | 1039 | 747  | 163  | 326  | 652  |
| 1 | 7 | 1  | 29 | 31 | 1  | 969  | 607  | 1214 | 1097 | 863  | 395  | 790  | 249  | 498  | 996  | 661  |
| 3 | 1 | 1  | 29 | 31 | 1  | 35   | 70   | 140  | 280  | 560  | 1120 | 908  | 487  | 974  | 617  | 1234 |
| 1 | 1 | 1  | 29 | 31 | 1  | 899  | 467  | 934  | 537  | 1074 | 817  | 303  | 606  | 1212 | 1013 | 855  |
| 3 | 7 | 23 | 1  | 31 | 1  | 332  | 664  | 1328 | 1325 | 1319 | 1307 | 1283 | 1235 | 1139 | 947  | 563  |
| 1 | 7 | 23 | 1  | 31 | 1  | 996  | 665  | 1330 | 1329 | 1327 | 1323 | 1315 | 1299 | 1267 | 1263 | 1035 |
| 3 | 1 | 23 | 1  | 31 | 1  | 808  | 285  | 570  | 1140 | 949  | 567  | 1134 | 937  | 543  | 1086 | 841  |
| 1 | 1 | 23 | 1  | 31 | 1  | 713  | 95   | 190  | 380  | 760  | 189  | 378  | 756  | 181  | 362  | 724  |
| 3 | 7 | 1  | 1  | 31 | 1  | 651  | 1302 | 1273 | 1215 | 1099 | 867  | 403  | 806  | 281  | 562  | 1124 |
| 1 | 7 | 1  | 1  | 31 | 1  | 217  | 434  | 868  | 405  | 810  | 289  | 578  | 1156 | 981  | 631  | 1262 |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 31 | 1  | 93   | 186  | 372  | 744  | 157  | 314  | 628  | 1256 | 1181 | 1031 | 731  |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 31 | 1  | 31   | 62   | 124  | 248  | 496  | 992  | 653  | 1306 | 1261 | 1231 | 1131 |
| 3 | 7 | 23 | 29 | 1  | 1  | 687  | 63   | 126  | 252  | 504  | 1008 | 685  | 39   | 78   | 156  | 312  |
| 1 | 7 | 23 | 29 | 1  | 1  | 676  | 21   | 42   | 84   | 168  | 336  | 672  | 13   | 26   | 52   | 104  |
| 3 | 1 | 23 | 29 | 1  | 1  | 670  | 9    | 18   | 36   | 72   | 144  | 288  | 576  | 1152 | 973  | 615  |
| 1 | 1 | 23 | 29 | 1  | 1  | 667  | 3    | 6    | 12   | 24   | 48   | 96   | 192  | 384  | 768  | 205  |
| 3 | 7 | 1  | 29 | 1  | 1  | 609  | 1218 | 1105 | 979  | 427  | 854  | 377  | 754  | 177  | 354  | 708  |
| 1 | 7 | 1  | 29 | 1  | 1  | 263  | 406  | 812  | 293  | 586  | 1172 | 1013 | 695  | 59   | 118  | 236  |
| 3 | 1 | 1  | 29 | 1  | 1  | 87   | 174  | 348  | 696  | 61   | 122  | 244  | 488  | 976  | 621  | 1242 |
| 1 | 1 | 1  | 29 | 1  | 1  | 29   | 58   | 116  | 232  | 464  | 928  | 525  | 1050 | 769  | 207  | 414  |
| 3 | 7 | 23 | 1  | 1  | 1  | 483  | 966  | 601  | 1202 | 1073 | 815  | 299  | 598  | 1196 | 1061 | 791  |
| 1 | 7 | 23 | 1  | 1  | 1  | 161  | 322  | 644  | 1288 | 1245 | 1159 | 987  | 643  | 1286 | 1241 | 1151 |
| 3 | 1 | 23 | 1  | 1  | 1  | 69   | 138  | 276  | 552  | 1104 | 877  | 423  | 846  | 361  | 722  | 1143 |
| 1 | 1 | 23 | 1  | 1  | 1  | 23   | 46   | 92   | 184  | 368  | 736  | 141  | 282  | 564  | 1128 | 925  |
| 3 | 7 | 1  | 1  | 1  | 1  | 21   | 42   | 84   | 168  | 336  | 672  | 13   | 26   | 52   | 104  | 208  |
| 1 | 7 | 1  | 1  | 1  | 1  | 7    | 14   | 28   | 56   | 112  | 224  | 448  | 896  | 461  | 922  | 513  |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 3    | 6    | 12   | 24   | 48   | 96   | 192  | 384  | 768  | 205  | 410  |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1    | 2    | 4    | 8    | 16   | 32   | 64   | 128  | 256  | 512  | 1024 |



Tabelle 2  
Kongruenzen modulo  $121 = 11^2$

|   | 1   | 2   | 2 <sup>2</sup> | 2 <sup>3</sup> | 2 <sup>4</sup> | 2 <sup>5</sup> | 2 <sup>6</sup> | 2 <sup>7</sup> | 2 <sup>8</sup> | 2 <sup>9</sup> | 2 <sup>10</sup> |
|---|-----|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| 3 | 32  | 64  | 7              | 14             | 28             | 56             | 112            | 103            | 85             | 49             | 98              |
| 1 | 51  | 102 | 83             | 45             | 90             | 59             | 118            | 115            | 109            | 97             | 73              |
| 3 | 91  | 61  | 1              | 0              | 4              | 8              | 16             | 32             | 64             | 7              | 14              |
| 1 | 111 | 101 | 81             | 41             | 82             | 43             | 86             | 51             | 102            | 83             | 45              |
| 3 | 54  | 108 | 95             | 69             | 17             | 34             | 68             | 15             | 30             | 60             | 120             |
| 1 | 18  | 36  | 72             | 23             | 46             | 92             | 63             | 5              | 10             | 20             | 40              |
| 3 | 25  | 50  | 100            | 79             | 97             | 74             | 27             | 54             | 108            | 95             | 69              |
| 1 | 69  | 57  | 114            | 107            | 93             | 65             | 9              | 18             | 36             | 72             | 23              |
| 3 | 47  | 94  | 67             | 13             | 26             | 52             | 104            | 87             | 53             | 106            | 91              |
| 1 | 56  | 112 | 103            | 85             | 49             | 98             | 75             | 29             | 58             | 116            | 111             |
| 3 | 24  | 48  | 96             | 71             | 21             | 42             | 84             | 47             | 94             | 67             | 13              |
| 1 | 8   | 16  | 32             | 64             | 7              | 14             | 28             | 56             | 112            | 103            | 85              |
| 3 | 102 | 83  | 45             | 90             | 59             | 118            | 115            | 109            | 97             | 73             | 25              |
| 1 | 34  | 68  | 15             | 30             | 60             | 120            | 119            | 117            | 113            | 105            | 89              |
| 3 | 101 | 81  | 41             | 82             | 43             | 86             | 51             | 102            | 83             | 45             | 90              |
| 1 | 74  | 27  | 54             | 108            | 95             | 69             | 17             | 34             | 68             | 15             | 30              |
| 3 | 83  | 45  | 90             | 59             | 118            | 115            | 109            | 97             | 73             | 25             | 50              |
| 1 | 68  | 15  | 30             | 60             | 120            | 119            | 117            | 113            | 105            | 89             | 57              |
| 3 | 81  | 41  | 82             | 43             | 86             | 51             | 102            | 83             | 45             | 90             | 59              |
| 1 | 27  | 54  | 108            | 95             | 69             | 17             | 34             | 68             | 15             | 30             | 60              |
| 3 | 72  | 23  | 46             | 92             | 63             | 5              | 10             | 20             | 40             | 80             | 39              |
| 1 | 24  | 48  | 96             | 71             | 21             | 42             | 84             | 47             | 94             | 67             | 13              |
| 3 | 114 | 107 | 93             | 65             | 9              | 18             | 36             | 72             | 23             | 46             | 92              |
| 1 | 38  | 76  | 31             | 62             | 3              | 6              | 12             | 24             | 48             | 96             | 71              |
| 3 | 103 | 85  | 49             | 98             | 75             | 29             | 58             | 116            | 111            | 101            | 81              |
| 1 | 115 | 109 | 97             | 73             | 25             | 50             | 100            | 79             | 37             | 74             | 27              |
| 3 | 32  | 64  | 7              | 14             | 28             | 56             | 112            | 103            | 85             | 49             | 98              |
| 1 | 41  | 82  | 43             | 86             | 51             | 102            | 83             | 45             | 90             | 59             | 118             |
| 3 | 51  | 102 | 83             | 45             | 90             | 59             | 118            | 115            | 109            | 97             | 73              |
| 1 | 15  | 30  | 60             | 120            | 119            | 117            | 113            | 105            | 89             | 57             | 114             |
| 3 | 5   | 10  | 20             | 40             | 80             | 39             | 78             | 35             | 70             | 19             | 38              |
| 1 | 54  | 108 | 95             | 69             | 17             | 34             | 68             | 15             | 30             | 60             | 120             |
| 3 | 18  | 36  | 72             | 23             | 46             | 92             | 63             | 5              | 10             | 20             | 40              |
| 1 | 42  | 84  | 47             | 94             | 67             | 13             | 26             | 52             | 104            | 87             | 53              |
| 3 | 6   | 12  | 24             | 48             | 96             | 71             | 21             | 42             | 84             | 47             | 94              |
| 1 | 16  | 32  | 64             | 7              | 14             | 28             | 56             | 112            | 103            | 85             | 49              |
| 3 | 86  | 51  | 102            | 83             | 45             | 90             | 59             | 118            | 115            | 109            | 97              |
| 1 | 53  | 106 | 91             | 61             | 1              | 2              | 4              | 8              | 16             | 32             | 64              |
| 3 | 58  | 116 | 111            | 101            | 81             | 41             | 82             | 43             | 86             | 51             | 102             |
| 1 | 119 | 117 | 113            | 105            | 89             | 57             | 114            | 107            | 93             | 65             | 9               |
| 3 | 80  | 39  | 78             | 35             | 70             | 19             | 38             | 76             | 31             | 62             | 3               |
| 1 | 17  | 34  | 68             | 15             | 30             | 60             | 120            | 119            | 117            | 113            | 105             |
| 3 | 46  | 92  | 63             | 5              | 10             | 20             | 40             | 80             | 39             | 78             | 35              |
| 1 | 42  | 84  | 47             | 94             | 67             | 13             | 26             | 52             | 104            | 87             | 53              |
| 3 | 14  | 28  | 56             | 112            | 103            | 85             | 49             | 98             | 75             | 29             | 58              |
| 1 | 6   | 12  | 24             | 48             | 96             | 71             | 21             | 42             | 84             | 47             | 94              |
| 3 | 2   | 4   | 8              | 16             | 32             | 64             | 7              | 14             | 28             | 56             | 112             |
| 1 | 84  | 47  | 94             | 67             | 13             | 26             | 52             | 104            | 87             | 53             | 106             |
| 3 | 28  | 56  | 112            | 103            | 85             | 49             | 98             | 75             | 29             | 58             | 116             |
| 1 | 12  | 24  | 48             | 96             | 71             | 21             | 42             | 84             | 47             | 94             | 67              |
| 3 | 4   | 8   | 16             | 32             | 64             | 7              | 14             | 28             | 56             | 112            | 103             |
| 1 | 51  | 102 | 83             | 45             | 90             | 59             | 118            | 115            | 109            | 97             | 73              |
| 3 | 17  | 34  | 68             | 15             | 30             | 60             | 120            | 119            | 117            | 113            | 105             |
| 1 | 111 | 101 | 81             | 41             | 82             | 43             | 86             | 51             | 102            | 83             | 45              |
| 3 | 37  | 74  | 27             | 54             | 108            | 95             | 69             | 17             | 34             | 68             | 15              |
| 1 | 78  | 35  | 70             | 19             | 38             | 76             | 31             | 62             | 3              | 6              | 12              |
| 3 | 26  | 52  | 104            | 87             | 53             | 106            | 91             | 61             | 1              | 2              | 4               |
| 1 | 63  | 5   | 10             | 20             | 40             | 80             | 39             | 78             | 35             | 70             | 19              |
| 3 | 21  | 42  | 84             | 47             | 94             | 67             | 13             | 26             | 52             | 104            | 87              |
| 1 | 56  | 112 | 103            | 85             | 49             | 98             | 75             | 29             | 58             | 116            | 111             |
| 3 | 59  | 118 | 115            | 109            | 97             | 73             | 25             | 50             | 100            | 79             | 37              |
| 1 | 8   | 16  | 32             | 64             | 7              | 14             | 28             | 56             | 112            | 103            | 85              |
| 3 | 43  | 86  | 51             | 102            | 83             | 45             | 90             | 59             | 118            | 115            | 109             |

Tab. 2 (Fortsetzung)

|   |   |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 3 | 7 | 23 | 29 | 31 | 37 | 12  | 24  | 48  | 96  | 71  | 21  | 42  | 84  | 47  | 94  | 67  |
| 1 | 7 | 23 | 29 | 31 | 37 | 4   | 8   | 16  | 32  | 64  | 7   | 14  | 28  | 56  | 112 | 103 |
| 3 | 1 | 23 | 29 | 31 | 37 | 19  | 38  | 76  | 31  | 62  | 3   | 6   | 12  | 24  | 48  | 96  |
| 1 | 1 | 23 | 29 | 31 | 37 | 87  | 53  | 106 | 91  | 61  | 1   | 2   | 4   | 8   | 16  | 32  |
| 3 | 7 | 1  | 29 | 31 | 37 | 111 | 101 | 81  | 41  | 82  | 43  | 86  | 51  | 102 | 83  | 45  |
| 1 | 7 | 1  | 29 | 31 | 37 | 37  | 74  | 27  | 54  | 108 | 95  | 69  | 17  | 34  | 68  | 15  |
| 3 | 1 | 1  | 29 | 31 | 37 | 85  | 49  | 98  | 75  | 29  | 58  | 116 | 111 | 101 | 81  | 41  |
| 1 | 1 | 1  | 29 | 31 | 37 | 109 | 97  | 73  | 25  | 50  | 100 | 79  | 37  | 74  | 27  | 54  |
| 3 | 7 | 23 | 1  | 31 | 37 | 63  | 5   | 10  | 20  | 40  | 80  | 39  | 78  | 35  | 70  | 19  |
| 1 | 7 | 23 | 1  | 31 | 37 | 21  | 42  | 84  | 47  | 94  | 67  | 13  | 26  | 52  | 104 | 87  |
| 1 | 1 | 23 | 1  | 31 | 37 | 9   | 18  | 36  | 72  | 23  | 46  | 92  | 63  | 5   | 10  | 20  |
| 3 | 7 | 1  | 1  | 31 | 37 | 3   | 6   | 12  | 24  | 48  | 96  | 71  | 21  | 42  | 84  | 47  |
| 1 | 7 | 1  | 1  | 31 | 37 | 8   | 16  | 32  | 64  | 7   | 14  | 28  | 56  | 112 | 103 | 85  |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 31 | 37 | 53  | 106 | 91  | 61  | 1   | 2   | 4   | 8   | 16  | 32  | 64  |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 31 | 37 | 58  | 116 | 111 | 101 | 81  | 41  | 82  | 43  | 86  | 51  | 102 |
| 3 | 7 | 23 | 29 | 1  | 37 | 16  | 32  | 64  | 7   | 14  | 28  | 56  | 112 | 103 | 85  | 49  |
| 1 | 7 | 23 | 29 | 1  | 37 | 86  | 51  | 102 | 83  | 45  | 90  | 59  | 118 | 115 | 109 | 97  |
| 3 | 1 | 23 | 29 | 1  | 37 | 106 | 91  | 61  | 1   | 2   | 4   | 8   | 16  | 32  | 64  | 7   |
| 1 | 1 | 23 | 29 | 1  | 37 | 116 | 111 | 101 | 81  | 41  | 82  | 43  | 86  | 51  | 102 | 83  |
| 3 | 7 | 1  | 29 | 1  | 37 | 27  | 54  | 108 | 95  | 69  | 17  | 34  | 68  | 15  | 30  | 60  |
| 1 | 7 | 1  | 29 | 1  | 37 | 9   | 18  | 36  | 72  | 23  | 46  | 92  | 63  | 5   | 10  | 20  |
| 3 | 1 | 1  | 29 | 1  | 37 | 73  | 25  | 50  | 100 | 79  | 37  | 74  | 27  | 54  | 108 | 95  |
| 1 | 1 | 1  | 29 | 1  | 37 | 105 | 89  | 57  | 114 | 107 | 93  | 65  | 9   | 18  | 36  | 72  |
| 3 | 7 | 23 | 1  | 1  | 37 | 84  | 47  | 94  | 67  | 13  | 26  | 52  | 104 | 87  | 53  | 106 |
| 1 | 7 | 23 | 1  | 1  | 37 | 28  | 56  | 112 | 103 | 85  | 49  | 98  | 75  | 29  | 58  | 116 |
| 3 | 1 | 23 | 1  | 1  | 37 | 12  | 24  | 48  | 96  | 71  | 21  | 42  | 84  | 47  | 94  | 67  |
| 1 | 1 | 23 | 1  | 1  | 37 | 4   | 8   | 16  | 32  | 64  | 7   | 14  | 28  | 56  | 112 | 103 |
| 3 | 7 | 1  | 1  | 1  | 37 | 51  | 102 | 83  | 45  | 90  | 59  | 118 | 115 | 109 | 97  | 73  |
| 1 | 7 | 1  | 1  | 1  | 37 | 17  | 34  | 68  | 15  | 30  | 60  | 120 | 119 | 117 | 113 | 105 |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 1  | 37 | 111 | 101 | 81  | 41  | 82  | 43  | 86  | 51  | 102 | 83  | 45  |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 37 | 37  | 74  | 27  | 54  | 108 | 95  | 69  | 17  | 34  | 68  | 15  |
| 3 | 7 | 23 | 29 | 31 | 1  | 69  | 17  | 34  | 68  | 15  | 30  | 60  | 120 | 119 | 117 | 113 |
| 1 | 7 | 23 | 29 | 31 | 1  | 23  | 46  | 92  | 63  | 5   | 10  | 20  | 40  | 80  | 39  | 78  |
| 3 | 1 | 23 | 29 | 31 | 1  | 79  | 37  | 74  | 27  | 54  | 108 | 95  | 69  | 17  | 34  | 68  |
| 1 | 1 | 23 | 29 | 31 | 1  | 107 | 93  | 65  | 9   | 18  | 36  | 72  | 23  | 46  | 92  | 63  |
| 3 | 7 | 1  | 29 | 31 | 1  | 3   | 6   | 12  | 24  | 48  | 96  | 71  | 21  | 42  | 84  | 47  |
| 1 | 7 | 1  | 29 | 31 | 1  | 1   | 2   | 4   | 8   | 16  | 32  | 64  | 7   | 14  | 28  | 56  |
| 3 | 1 | 1  | 29 | 31 | 1  | 35  | 70  | 19  | 38  | 76  | 31  | 62  | 3   | 6   | 12  | 24  |
| 1 | 1 | 1  | 29 | 31 | 1  | 52  | 104 | 87  | 53  | 106 | 91  | 61  | 1   | 2   | 4   | 8   |
| 3 | 7 | 23 | 1  | 31 | 1  | 90  | 59  | 118 | 115 | 109 | 97  | 73  | 25  | 50  | 100 | 79  |
| 1 | 7 | 23 | 1  | 31 | 1  | 30  | 60  | 120 | 119 | 117 | 113 | 105 | 89  | 57  | 114 | 107 |
| 3 | 1 | 23 | 1  | 31 | 1  | 82  | 43  | 86  | 51  | 102 | 83  | 45  | 90  | 59  | 118 | 115 |
| 1 | 1 | 23 | 1  | 31 | 1  | 108 | 95  | 69  | 17  | 34  | 68  | 15  | 30  | 60  | 120 | 119 |
| 3 | 7 | 1  | 1  | 31 | 1  | 46  | 92  | 63  | 5   | 10  | 20  | 40  | 80  | 39  | 78  | 35  |
| 1 | 7 | 1  | 1  | 31 | 1  | 98  | 71  | 21  | 42  | 84  | 47  | 94  | 67  | 13  | 26  | 52  |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 31 | 1  | 93  | 65  | 9   | 18  | 36  | 72  | 23  | 46  | 92  | 62  | 5   |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 31 | 1  | 31  | 62  | 3   | 6   | 12  | 24  | 48  | 96  | 71  | 21  | 42  |
| 3 | 7 | 23 | 29 | 1  | 1  | 92  | 63  | 5   | 10  | 20  | 40  | 80  | 39  | 78  | 35  | 70  |
| 1 | 7 | 23 | 29 | 1  | 1  | 71  | 21  | 42  | 84  | 47  | 94  | 67  | 13  | 26  | 52  | 104 |
| 3 | 1 | 23 | 29 | 1  | 1  | 65  | 9   | 18  | 36  | 72  | 23  | 46  | 92  | 63  | 5   | 10  |
| 1 | 1 | 23 | 29 | 1  | 1  | 62  | 3   | 6   | 12  | 24  | 48  | 96  | 71  | 21  | 42  | 84  |
| 3 | 7 | 1  | 29 | 1  | 1  | 4   | 8   | 16  | 32  | 64  | 7   | 14  | 28  | 56  | 112 | 102 |
| 1 | 7 | 1  | 29 | 1  | 1  | 82  | 43  | 86  | 51  | 102 | 83  | 45  | 90  | 59  | 118 | 115 |
| 3 | 1 | 1  | 29 | 1  | 1  | 87  | 53  | 106 | 91  | 61  | 1   | 2   | 4   | 8   | 16  | 32  |
| 1 | 1 | 1  | 29 | 1  | 1  | 29  | 58  | 116 | 111 | 101 | 81  | 41  | 82  | 43  | 86  | 51  |
| 3 | 7 | 23 | 1  | 1  | 1  | 120 | 119 | 117 | 113 | 105 | 89  | 57  | 114 | 107 | 93  | 65  |
| 1 | 7 | 23 | 1  | 1  | 1  | 40  | 80  | 39  | 78  | 35  | 70  | 19  | 38  | 76  | 31  | 62  |
| 3 | 1 | 23 | 1  | 1  | 1  | 69  | 17  | 34  | 68  | 15  | 30  | 60  | 120 | 119 | 117 | 113 |
| 1 | 1 | 23 | 1  | 1  | 1  | 23  | 46  | 92  | 63  | 5   | 10  | 20  | 40  | 80  | 39  | 78  |
| 3 | 7 | 1  | 1  | 1  | 1  | 21  | 42  | 84  | 47  | 94  | 67  | 13  | 26  | 52  | 104 | 87  |
| 1 | 7 | 1  | 1  | 1  | 1  | 7   | 14  | 28  | 56  | 112 | 103 | 85  | 49  | 98  | 75  | 29  |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 3   | 6   | 12  | 24  | 48  | 96  | 71  | 21  | 42  | 84  | 47  |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 2   | 4   | 8   | 16  | 32  | 64  | 7   | 14  | 28  | 56  |

Tabelle 3  
Kongruenzen modulo 43

|   |   |    |    |    |    |    | 1  | 2  | 2 <sup>2</sup> | ... |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  | 2 <sup>10</sup> |
|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----------------|-----|----|----|----|----|----|----|----|--|--|--|-----------------|
| 3 | 5 | 11 | 23 | 29 | 31 | 37 | 6  | 12 | 24             | 5   | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 11 | 23 | 29 | 31 | 37 | 2  | 4  | 8              | 16  | 32 | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 | 27 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 11 | 23 | 29 | 31 | 37 | 27 | 11 | 22             | 1   | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 11 | 23 | 29 | 31 | 37 | 9  | 18 | 36             | 29  | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 1  | 23 | 29 | 31 | 37 | 24 | 5  | 10             | 20  | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 1  | 23 | 29 | 31 | 37 | 8  | 16 | 32             | 21  | 42 | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 | 22 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 1  | 23 | 29 | 31 | 37 | 22 | 1  | 2              | 4   | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 | 39 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 1  | 23 | 29 | 31 | 37 | 36 | 29 | 15             | 30  | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 | 13 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 11 | 1  | 29 | 31 | 37 | 4  | 8  | 16             | 32  | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 11 | 1  | 29 | 31 | 37 | 30 | 17 | 34             | 25  | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 11 | 1  | 29 | 31 | 37 | 18 | 36 | 29             | 15  | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 11 | 1  | 29 | 31 | 37 | 6  | 12 | 24             | 5   | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 1  | 1  | 29 | 31 | 37 | 16 | 32 | 21             | 42  | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 1  | 1  | 29 | 31 | 37 | 34 | 25 | 7              | 14  | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 29 | 31 | 37 | 29 | 15 | 30             | 17  | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 29 | 31 | 37 | 24 | 5  | 10             | 20  | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 11 | 23 | 1  | 31 | 37 | 18 | 36 | 29             | 15  | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 11 | 23 | 1  | 31 | 37 | 6  | 12 | 24             | 5   | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 11 | 23 | 1  | 31 | 37 | 38 | 33 | 23             | 3   | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 11 | 23 | 1  | 31 | 37 | 27 | 11 | 22             | 1   | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 1  | 23 | 1  | 31 | 37 | 29 | 15 | 30             | 17  | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 1  | 23 | 1  | 31 | 37 | 24 | 5  | 10             | 20  | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 1  | 23 | 1  | 31 | 37 | 23 | 3  | 6              | 12  | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 1  | 23 | 1  | 31 | 37 | 22 | 1  | 2              | 4   | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 | 39 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 11 | 1  | 1  | 31 | 37 | 12 | 24 | 5              | 10  | 20 | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 11 | 1  | 1  | 31 | 37 | 4  | 8  | 16             | 32  | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 11 | 1  | 1  | 31 | 37 | 11 | 22 | 1              | 2   | 4  | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 11 | 1  | 1  | 31 | 37 | 18 | 36 | 29             | 15  | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 1  | 1  | 1  | 31 | 37 | 5  | 10 | 20             | 40  | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 | 5  |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 1  | 1  | 1  | 31 | 37 | 16 | 32 | 21             | 42  | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 1  | 31 | 37 | 1  | 2  | 4              | 8   | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 31 | 37 | 29 | 15 | 30             | 17  | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 11 | 23 | 29 | 1  | 37 | 21 | 42 | 41             | 39  | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 11 | 23 | 29 | 1  | 37 | 7  | 14 | 28             | 13  | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 11 | 23 | 29 | 1  | 37 | 30 | 17 | 34             | 25  | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 11 | 23 | 29 | 1  | 37 | 10 | 20 | 40             | 37  | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 1  | 23 | 29 | 1  | 37 | 41 | 39 | 35             | 27  | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 1  | 23 | 29 | 1  | 37 | 28 | 13 | 26             | 9   | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 1  | 23 | 29 | 1  | 37 | 34 | 25 | 7              | 14  | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 1  | 23 | 29 | 1  | 37 | 40 | 37 | 31             | 19  | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 11 | 1  | 29 | 1  | 37 | 14 | 28 | 13             | 26  | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 11 | 1  | 29 | 1  | 37 | 19 | 38 | 33             | 23  | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 | 20 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 11 | 1  | 29 | 1  | 37 | 20 | 40 | 37             | 31  | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 11 | 1  | 29 | 1  | 37 | 21 | 42 | 41             | 39  | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 1  | 1  | 29 | 1  | 37 | 4  | 8  | 16             | 32  | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 11 | 1  | 29 | 1  | 37 | 30 | 17 | 34             | 25  | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 1  | 23 | 1  | 1  | 37 | 37 | 31 | 19             | 38  | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 1  | 23 | 1  | 1  | 37 | 41 | 39 | 35             | 27  | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 11 | 1  | 29 | 1  | 37 | 20 | 40 | 37             | 31  | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 11 | 1  | 29 | 1  | 37 | 21 | 42 | 41             | 39  | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 11 | 23 | 1  | 1  | 37 | 4  | 8  | 16             | 32  | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 11 | 23 | 1  | 1  | 37 | 30 | 17 | 34             | 25  | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 11 | 23 | 1  | 1  | 37 | 37 | 31 | 19             | 38  | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 11 | 23 | 1  | 1  | 37 | 41 | 39 | 35             | 27  | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 1  | 23 | 1  | 1  | 37 | 16 | 32 | 21             | 42  | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 1  | 23 | 1  | 1  | 37 | 34 | 25 | 7              | 14  | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 1  | 23 | 1  | 1  | 37 | 42 | 41 | 39             | 35  | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 1  | 23 | 1  | 1  | 37 | 14 | 28 | 13             | 26  | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 11 | 1  | 1  | 1  | 37 | 17 | 34 | 25             | 7   | 14 | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 |  |  |  |                 |
| 1 | 5 | 11 | 1  | 1  | 1  | 37 | 20 | 40 | 37             | 31  | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 |  |  |  |                 |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 37 | 39 | 35 | 27             | 11  | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 37 | 13 | 26 | 9              | 18  | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 |  |  |  |                 |
| 3 | 5 | 1  | 1  | 1  | 1  | 37 | 25 | 7  | 14             | 28  | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 |  |  |  |                 |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 37 | 37 | 31 | 19             | 38  | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  |  |  |  |                 |

Tab. 3 (Fortsetzung)

|   |   |    |    |    |    |
|---|---|----|----|----|----|
| 3 | 5 | 11 | 23 | 29 | 31 |
| 1 | 5 | 11 | 23 | 29 | 31 |
| 3 | 1 | 11 | 23 | 29 | 31 |
| 1 | 1 | 11 | 23 | 29 | 31 |
| 3 | 5 | 1  | 23 | 29 | 31 |
| 1 | 5 | 1  | 23 | 29 | 31 |
| 3 | 1 | 1  | 23 | 29 | 31 |
| 1 | 1 | 1  | 23 | 29 | 31 |
| 3 | 5 | 11 | 1  | 29 | 31 |
| 1 | 5 | 11 | 1  | 29 | 31 |
| 3 | 1 | 11 | 1  | 29 | 31 |
| 1 | 1 | 11 | 1  | 29 | 31 |
| 3 | 5 | 1  | 1  | 29 | 31 |
| 1 | 5 | 1  | 1  | 29 | 31 |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 29 | 31 |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 29 | 31 |
| 3 | 5 | 11 | 23 | 1  | 31 |
| 1 | 5 | 11 | 23 | 1  | 31 |
| 3 | 1 | 11 | 23 | 1  | 31 |
| 1 | 1 | 11 | 23 | 1  | 31 |
| 3 | 5 | 1  | 23 | 1  | 31 |
| 1 | 5 | 1  | 23 | 1  | 31 |
| 3 | 1 | 1  | 23 | 1  | 31 |
| 1 | 1 | 1  | 23 | 1  | 31 |
| 3 | 5 | 11 | 1  | 1  | 31 |
| 1 | 5 | 11 | 1  | 1  | 31 |
| 3 | 1 | 11 | 1  | 1  | 31 |
| 1 | 1 | 11 | 1  | 1  | 31 |
| 3 | 5 | 1  | 1  | 1  | 31 |
| 1 | 5 | 1  | 1  | 1  | 31 |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 1  | 31 |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 31 |
| 3 | 5 | 11 | 23 | 29 | 1  |
| 1 | 5 | 11 | 23 | 29 | 1  |
| 3 | 1 | 11 | 23 | 29 | 1  |
| 1 | 1 | 11 | 23 | 29 | 1  |
| 3 | 5 | 1  | 23 | 29 | 1  |
| 1 | 5 | 1  | 23 | 29 | 1  |
| 3 | 1 | 1  | 23 | 29 | 1  |
| 1 | 1 | 1  | 23 | 29 | 1  |
| 3 | 5 | 11 | 1  | 29 | 1  |
| 1 | 5 | 11 | 1  | 29 | 1  |
| 3 | 1 | 11 | 1  | 29 | 1  |
| 1 | 1 | 11 | 1  | 29 | 1  |
| 3 | 5 | 1  | 1  | 29 | 1  |
| 1 | 5 | 1  | 1  | 29 | 1  |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 29 | 1  |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 29 | 1  |
| 3 | 5 | 11 | 23 | 1  | 1  |
| 1 | 5 | 11 | 23 | 1  | 1  |
| 3 | 1 | 11 | 23 | 1  | 1  |
| 1 | 1 | 11 | 23 | 1  | 1  |
| 3 | 5 | 1  | 23 | 1  | 1  |
| 1 | 5 | 1  | 23 | 1  | 1  |
| 3 | 1 | 1  | 23 | 1  | 1  |
| 1 | 1 | 1  | 23 | 1  | 1  |
| 3 | 5 | 11 | 1  | 1  | 1  |
| 1 | 5 | 11 | 1  | 1  | 1  |
| 3 | 1 | 11 | 1  | 1  | 1  |
| 1 | 1 | 11 | 1  | 1  | 1  |
| 3 | 5 | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 1 | 5 | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 3 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 42 | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  |
| 14 | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 |
| 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 |
| 20 | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 |
| 39 | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 |
| 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 |
| 25 | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 |
| 37 | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  |
| 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 |
| 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 |
| 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 |
| 42 | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  |
| 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  |
| 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 |
| 31 | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 |
| 39 | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 |
| 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 |
| 42 | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  |
| 8  | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 | 22 |
| 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 |
| 31 | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 |
| 39 | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 |
| 32 | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  |
| 25 | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 |
| 41 | 39 | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 |
| 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 |
| 34 | 25 | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 |
| 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 |
| 35 | 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 | 21 |
| 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  |
| 7  | 14 | 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 |
| 31 | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 |
| 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 |
| 6  | 12 | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 |
| 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 |
| 27 | 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 |
| 29 | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 |
| 24 | 5  | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 |
| 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 |
| 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 | 39 |
| 12 | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 |
| 4  | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 |
| 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 |
| 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 |
| 5  | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  |
| 16 | 32 | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 | 27 | 11 | 22 | 1  |
| 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 |
| 29 | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 |
| 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 |
| 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 |
| 28 | 13 | 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 |
| 38 | 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 |
| 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 |
| 29 | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 |
| 26 | 9  | 18 | 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  |
| 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 |
| 36 | 29 | 15 | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 | 13 |
| 12 | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 |
| 33 | 23 | 3  | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 | 37 |
| 11 | 22 | 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 |
| 15 | 30 | 17 | 34 | 25 | 7  | 14 | 28 | 13 | 26 | 9  |
| 5  | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 | 19 | 38 | 33 | 23 | 3  |
| 3  | 6  | 12 | 24 | 5  | 10 | 20 | 40 | 37 | 31 | 19 |
| 1  | 2  | 4  | 8  | 16 | 32 | 21 | 42 | 41 | 39 | 35 |



### Kongruenzen modulo 31

|   |   |    |    |    | 1  | 2  | 2 <sup>2</sup> | ... | 10 |    |    |
|---|---|----|----|----|----|----|----------------|-----|----|----|----|
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 11 | 22             | 13  | 26 | 21 | 11 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 14 | 28             | 25  | 19 | 7  | 14 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 6  | 12             | 24  | 17 | 3  | 6  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 2  | 4              | 8   | 16 | 1  | 2  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 21 | 11             | 22  | 13 | 26 | 21 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 9  | 18             | 5   | 10 | 20 | 9  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 3  | 6              | 12  | 24 | 17 | 3  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 18 | 5              | 10  | 20 | 9  | 18 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 6  | 12             | 24  | 17 | 3  | 6  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 7  | 14             | 28  | 25 | 19 | 7  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 23 | 15             | 30  | 29 | 27 | 23 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 27 | 23             | 15  | 30 | 29 | 27 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 9  | 18             | 5   | 10 | 20 | 9  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 26 | 21             | 11  | 22 | 13 | 26 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 19 | 7              | 14  | 28 | 25 | 19 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 10 | 20             | 9   | 18 | 5  | 10 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 24 | 17             | 3   | 6  | 12 | 24 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 28 | 25             | 19  | 7  | 14 | 28 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 30 | 29             | 27  | 23 | 15 | 30 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 15 | 30             | 29  | 27 | 23 | 15 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 5  | 10             | 20  | 9  | 18 | 5  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 11 | 22             | 13  | 26 | 21 | 11 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 14 | 28             | 25  | 19 | 7  | 14 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 22 | 13             | 26  | 21 | 11 | 22 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 28 | 25             | 19  | 7  | 14 | 28 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 12 | 24             | 17  | 3  | 6  | 12 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 4  | 8              | 16  | 1  | 2  | 4  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 2  | 4              | 8   | 16 | 1  | 2  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 11 | 22             | 13  | 26 | 21 | 11 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 18 | 5              | 10  | 20 | 9  | 18 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 7  | 14             | 28  | 25 | 19 | 7  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 23 | 15             | 30  | 29 | 27 | 23 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 1  | 2              | 4   | 8  | 16 | 1  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 21 | 11             | 22  | 13 | 26 | 21 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 26 | 21             | 11  | 22 | 13 | 26 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 19 | 7              | 14  | 28 | 25 | 19 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 17 | 3              | 6   | 12 | 24 | 17 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 16 | 1              | 2   | 4  | 8  | 16 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 3  | 6              | 12  | 24 | 17 | 3  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 1  | 2              | 4   | 8  | 16 | 1  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 27 | 23             | 15  | 30 | 29 | 27 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 9  | 18             | 5   | 10 | 20 | 9  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 17 | 3              | 6   | 12 | 24 | 17 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 3  | 6              | 12  | 24 | 17 | 3  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 25 | 19             | 7   | 14 | 28 | 25 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 29 | 27             | 23  | 15 | 30 | 29 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 12 | 24             | 17  | 3  | 6  | 12 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 4  | 8              | 16  | 1  | 2  | 4  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 15 | 30             | 29  | 27 | 23 | 15 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 5  | 10             | 20  | 9  | 18 | 5  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 18 | 5              | 10  | 20 | 9  | 18 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 6  | 12             | 24  | 17 | 3  | 6  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 7  | 14             | 28  | 25 | 19 | 7  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 23 | 15             | 30  | 29 | 27 | 23 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 14 | 28             | 25  | 19 | 7  | 14 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 15 | 30             | 29  | 27 | 23 | 15 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 2  | 4              | 8   | 16 | 1  | 2  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 11 | 22             | 13  | 26 | 21 | 11 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 21 | 11             | 22  | 13 | 26 | 21 |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 7  | 14             | 28  | 25 | 19 | 7  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 3  | 6              | 12  | 24 | 17 | 3  |
| 3 | 7 | 11 | 23 | 29 | 37 | 1  | 2              | 4   | 8  | 16 | 1  |

Tabelle 6

Kongruenzen modulo 29

[illegible]

Tabelle 7

Kongruenzen modulo 37

[illegible]



Charaktertafeln1. ALT(5) ORDER 60 =  $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ 

|         | G  | 4  | 3  | 5   | 5   |
|---------|----|----|----|-----|-----|
| P POWER | A  | A  | A  | A   | A   |
| P' PART | A  | A  | A  | A   | A   |
| 1A      | 2A | 3A | 5A | B2  |     |
| 1:      | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   |
| 2:      | 3  | -1 | .  | -B5 | *2  |
| 3:      | 3  | -1 | .  | *2  | -B5 |
| 4:      | 4  | .  | 1  | -1  | -1  |
| 5:      | 5  | 1  | -1 | .   | .   |
| 2:      | 1A | 1A | 3A | 5B  | 5A  |
| 3:      | 1A | 2A | 1A | 5B  | 5A  |

STRUCTURE CONSTANTS FOR CLASS 2A

|     | 1A | 2A | 3A | 5A | 5B |
|-----|----|----|----|----|----|
| 1A: | .  | 1  | .  | .  | .  |
| 2A: | 15 | 2  | 3  | 5  | 5  |
| 3A: | .  | 4  | 6  | 5  | 5  |
| 5A: | .  | 4  | 3  | .  | .  |
| 5B: | .  | 4  | 3  | 5  | .  |

2. L(3,2) ORDER 168 =  $2^3 \cdot 3 \cdot 7$ 

|         | G  | 8  | 3  | 4  | 7  | 7  |
|---------|----|----|----|----|----|----|
| P POWER | A  | A  | A  | A  | A  | A  |
| P' PART | A  | A  | A  | A  | A  | A  |
| 1A      | 2A | 3A | 4A | 7A | B* |    |
| 1:      | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 2:      | 3  | -1 | .  | 1  | B7 | ** |
| 3:      | 3  | -1 | .  | 1  | ** | B7 |
| 4:      | 6  | 2  | .  | .  | -1 | -1 |
| 5:      | 7  | -1 | 1  | -1 | .  | .  |
| 6:      | 8  | .  | -1 | .  | 1  | 1  |
| 2:      | 1A | 1A | 3A | 2A | 7A | 7B |
| 3:      | 1A | 2A | 1A | 4A | 7B | 7A |

STRUCTURE CONSTANTS FOR CLASS 2A

|     | 1A | 2A | 3A | 4A | 7A | 7B |
|-----|----|----|----|----|----|----|
| 1A: | .  | 1  | .  | .  | .  | .  |
| 2A: | 21 | 4  | 3  | 4  | .  | .  |
| 3A: | .  | 8  | 6  | 8  | 7  | 7  |
| 4A: | .  | 8  | 6  | 1  | 7  | 7  |
| 7A: | .  | .  | 3  | 4  | .  | 7  |
| 7B: | .  | .  | 3  | 4  | 7  | .  |

3. ALT(6) ORDER 360 =  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ 

|         | G  | 8  | 9  | 9  | 4  | 5   | 5   |
|---------|----|----|----|----|----|-----|-----|
| P POWER | A  | A  | A  | A  | A  | A   | A   |
| P' PART | A  | A  | A  | A  | A  | A   | A   |
| 1A      | 2A | 3A | 3B | 4A | 5A | B2  |     |
| 1:      | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   |
| 2:      | 5  | 1  | -1 | 2  | -1 | .   | .   |
| 3:      | 5  | 1  | 2  | -1 | -1 | .   | .   |
| 4:      | 8  | .  | -1 | -1 | .  | -B5 | *2  |
| 5:      | 8  | .  | -1 | -1 | .  | *2  | -B5 |
| 6:      | 9  | 1  | .  | .  | 1  | -1  | -1  |
| 7:      | 10 | -2 | 1  | 1  | .  | .   | .   |
| 2:      | 1A | 1A | 3A | 3B | 2A | 5B  | 5A  |
| 3:      | 1A | 2A | 1A | 1A | 4A | 5B  | 5A  |

STRUCTURE CONSTANTS FOR CLASS 2A

|     | 1A | 2A | 3A | 3B | 4A | 5A | 5B |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1A: | .  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  |
| 2A: | 45 | 4  | 9  | 9  | 4  | 5  | 5  |
| 3A: | .  | 8  | 9  | .  | 4  | 5  | 5  |
| 3B: | .  | 8  | .  | 9  | 4  | 5  | 5  |
| 4A: | .  | 8  | 9  | 9  | 17 | 10 | 10 |
| 5A: | .  | 8  | 9  | 9  | 8  | 10 | 10 |
| 5B: | .  | 8  | 9  | 9  | 8  | 10 | 10 |

4. ALT(7) ORDER 2520 =  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 

|         | G  | 24 | 36 | 9  | 4  | 5  | 12 | 7  | 7  |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| P POWER | A  | A  | A  | A  | A  | A  | AA | A  | A  |
| P' PART | A  | A  | A  | A  | A  | A  | AA | A  | A  |
| 1A      | 2A | 3A | 3B | 4A | 5A | 6A | 7A | B* |    |
| 1:      | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 2:      | 6  | 2  | 3  | .  | .  | 1  | -1 | -1 | -1 |
| 3:      | 10 | -2 | 1  | 1  | .  | .  | 1  | B7 | ** |
| 4:      | 10 | -2 | 1  | 1  | .  | .  | 1  | ** | B7 |
| 5:      | 14 | 2  | -1 | 2  | .  | -1 | -1 | .  | .  |
| 6:      | 14 | 2  | 2  | -1 | .  | -1 | 2  | .  | .  |
| 7:      | 15 | -1 | 3  | .  | -1 | .  | -1 | 1  | 1  |
| 8:      | 21 | 1  | -3 | .  | -1 | 1  | 1  | .  | .  |
| 9:      | 35 | -1 | -1 | -1 | 1  | .  | -1 | .  | .  |
| 2:      | 1A | 1A | 3A | 3B | 2A | 5A | 3A | 7A | 7B |
| 3:      | 1A | 2A | 1A | 1A | 4A | 5A | 2A | 7B | 7A |

STRUCTURE CONSTANTS FOR CLASS 2A

|     | 1A  | 2A | 3A | 3B | 4A | 5A | 5B | 7A | 7B |
|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1A: | .   | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| 2A: | 105 | 8  | 18 | 9  | 4  | 5  | 6  | .  | .  |
| 3A: | .   | 12 | 12 | .  | 4  | 5  | 1  | .  | .  |
| 3B: | .   | 24 | .  | 15 | 12 | 10 | .  | 14 | 14 |
| 4A: | .   | 24 | 36 | 27 | 25 | 25 | 24 | 28 | 28 |
| 5A: | .   | 24 | 36 | 18 | 20 | 35 | 12 | 14 | 14 |
| 6A: | .   | 12 | 3  | .  | 8  | 5  | 14 | 14 | 14 |
| 7A: | .   | .  | .  | 18 | 16 | 10 | 24 | 7  | 28 |
| 7B: | .   | .  | .  | 18 | 16 | 10 | 24 | 28 | 7  |

5. U(3,3) ORDER 6048 =  $2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$

| G       | 96 | 100 | 9  | 96 | 96   | 16   | 12 | 7   | 7   | 8  | 8  | 12  | 12  |
|---------|----|-----|----|----|------|------|----|-----|-----|----|----|-----|-----|
| P POWER | A  | A   | A  | A  | A    | A    | AA | A   | A   | A  | B  | AB  | AA  |
| P' PART | A  | A   | A  | A  | A    | A    | AA | A   | A   | A  | A  | AA  | AB  |
| 1A      | 2A | 3A  | 3B | 4A | B*   | 4C   | 6A | 7A  | B*  | 8A | B* | 12A | B*  |
| 1:      | 1  | 1   | 1  | 1  | 1    | 1    | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1   | 1   |
| 2:      | 6  | -2  | -3 | 1  | -2   | 2    | 1  | -1  | -1  | 1  | 1  | 1   | 1   |
| 3:      | 7  | -1  | -2 | 1  | 3    | -1   | 2  | .   | .   | -1 | -1 | .   | .   |
| 4:      | 7  | 3   | -2 | 1  | 2A-1 | 1    | .  | .   | .   | B  | 00 | C-1 | .   |
| 5:      | 7  | 3   | -2 | 1  | 2A-1 | 00   | 1  | .   | .   | 00 | B  | 00  | C-1 |
| 6:      | 14 | -2  | 5  | -1 | 2    | 2    | 2  | 1   | .   | .  | .  | -1  | -1  |
| 7:      | 21 | 5   | 3  | .  | 1    | 1    | 1  | -1  | .   | .  | -1 | 1   | 1   |
| 8:      | 21 | 1   | 3  | .  | 2A-3 | 00   | -1 | 1   | .   | .  | B  | 00  | C   |
| 9:      | 21 | 1   | 3  | .  | 00   | 2A-3 | -1 | 1   | .   | .  | 00 | B   | C   |
| 10:     | 27 | 3   | .  | .  | 3    | 3    | -1 | .   | -1  | 1  | 1  | 1   | .   |
| 11:     | 28 | -4  | 1  | 1  | 4A   | 00   | .  | -1  | .   | .  | .  | C   | 00  |
| 12:     | 28 | -4  | 1  | 1  | 00   | 4A   | .  | -1  | .   | .  | .  | 00  | C   |
| 13:     | 32 | .   | -4 | -1 | .    | .    | .  | -B7 | .   | .  | .  | .   | .   |
| 14:     | 32 | .   | -4 | -1 | .    | .    | .  | 00  | -B7 | .  | .  | .   | .   |
| 2:      | 1A | 1A  | 3A | 3B | 2A   | 2A   | 3A | 7A  | 7B  | 4A | 4B | 6A  | 6A  |
| 3:      | 1A | 2A  | 1A | 1A | 4B   | 4A   | 4C | 2A  | 7B  | 7A | 8B | 8A  | 4B  |

STRUCTURE CONSTANTS FOR CLASS 2A

|      | 1A | 2A | 3A | 3B | 4A | 4B | 4C | 6A | 7A | 7B | 8A | 8B | 12A | 12B |
|------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| 1A:  | .  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 2A:  | 63 | 6  | 3  | .  | .  | .  | 4  | .  | .  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 3A:  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | .  | .  | .  | .  | 3   | 3   |
| 3B:  | .  | 32 | .  | 9  | .  | .  | 16 | 8  | 7  | 7  | 8  | 8  | .   | .   |
| 4A:  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | 2  | 4   | .   |
| 4B:  | .  | .  | .  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | .  | 2  | 4   | .   |
| 4C:  | .  | 24 | .  | 9  | 6  | 6  | 1  | .  | 7  | 7  | 2  | 2  | .   | .   |
| 6A:  | .  | .  | 9  | 6  | .  | .  | .  | .  | 7  | 7  | 8  | 8  | 3   | 3   |
| 7A:  | .  | .  | .  | 9  | .  | .  | 16 | 12 | 7  | 7  | 8  | 8  | 12  | 12  |
| 7B:  | .  | .  | .  | 9  | .  | .  | 16 | 12 | 7  | 7  | 8  | 8  | 12  | 12  |
| 8A:  | .  | .  | .  | 9  | .  | 24 | 4  | 12 | 7  | 7  | 17 | 2  | 12  | .   |
| 8B:  | .  | .  | .  | 9  | 24 | .  | 4  | 12 | 7  | 7  | 2  | 17 | .   | 12  |
| 12A: | .  | .  | 27 | .  | .  | 32 | .  | 3  | 7  | 7  | 8  | .  | 12  | 5   |
| 12B: | .  | .  | 27 | .  | 32 | .  | .  | 3  | 7  | 7  | .  | 8  | 5   | .   |

6. N(11) ORDER 7920 =  $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

| G       | 48 | 18 | 8  | 5  | 6  | 8   | 8  | 11  | 11  |
|---------|----|----|----|----|----|-----|----|-----|-----|
| P POWER | A  | A  | A  | A  | AA | A   | A  | A   | A   |
| P' PART | A  | A  | A  | A  | AA | A   | A  | A   | A   |
| 2A      | 2A | 3A | 4A | 5A | 6A | 8A  | B* | 11A | B*  |
| 1:      | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1  | 1   | 1   |
| 2:      | 10 | 2  | 1  | 2  | .  | -1  | .  | -1  | -1  |
| 3:      | 10 | -2 | 1  | .  | .  | A+C | 00 | -1  | -1  |
| 4:      | 10 | -2 | 1  | .  | .  | 1   | 00 | A+C | -1  |
| 5:      | 11 | 3  | 2  | -1 | 1  | .   | -1 | -1  | .   |
| 6:      | 16 | .  | -2 | .  | 1  | .   | .  | B11 | 00  |
| 7:      | 16 | .  | -2 | .  | 1  | .   | .  | 00  | B11 |
| 8:      | 44 | 4  | -1 | .  | -1 | 1   | .  | .   | .   |
| 9:      | 65 | -3 | .  | 1  | .  | .   | -1 | 1   | 1   |
| 10:     | 55 | -1 | 1  | -1 | .  | -1  | 1  | 1   | .   |
| 2:      | 1A | 1A | 3A | 2A | 5A | 3A  | 4A | 11B | 11A |
| 3:      | 1A | 2A | 1A | 4A | 5A | 2A  | 8A | 8B  | 11A |

STRUCTURE CONSTANTS FOR CLASS 2A

|      | 1A  | 2A | 3A | 4A | 5A | 6A | 8A | 8B | 11A | 11B |
|------|-----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| 1A:  | .   | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 2A:  | 165 | 12 | 12 | .  | .  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 3A:  | .   | 32 | 18 | 8  | 15 | 3  | 4  | 4  | 11  | 11  |
| 4A:  | .   | 24 | 18 | 41 | 15 | 12 | 24 | 20 | 11  | 11  |
| 5A:  | .   | 48 | 54 | 24 | 45 | 30 | 24 | 24 | 33  | 33  |
| 6A:  | .   | 48 | 9  | 16 | 25 | 24 | 20 | 20 | 44  | 44  |
| 8A:  | .   | .  | 9  | 20 | 15 | 21 | 0  | 41 | 22  | 22  |
| 8B:  | .   | .  | 9  | 20 | 15 | 21 | 41 | 0  | 22  | 22  |
| 11A: | .   | .  | 18 | 8  | 15 | 24 | 16 | 16 | 11  | 11  |
| 11B: | .   | .  | 18 | 8  | 15 | 24 | 16 | 16 | 11  | 11  |

7. 1(3,4) ORDER 20160 =  $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

|         | G  | 64 | 8  | 16 | 16 | 16  | 5   | 5  | 7  | 7  |
|---------|----|----|----|----|----|-----|-----|----|----|----|
| P POWER | A  | A  | A  | A  | A  | A   | A   | A  | A  | A  |
| P' PART | A  | A  | A  | A  | A  | A   | A   | A  | A  | A  |
| 1A      | 2A | 3A | 4A | 4B | 4C | 5A  | 5B  | 7A | 7B | 7C |
| 1:      | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  |
| 2:      | 20 | 4  | 2  | .  | .  | .   | .   | -1 | -1 | .  |
| 3:      | 35 | 3  | -1 | 3  | -1 | .   | .   | .  | .  | .  |
| 4:      | 35 | 3  | -1 | -1 | 3  | -1  | .   | .  | .  | .  |
| 5:      | 35 | 3  | -1 | -1 | 3  | .   | .   | .  | .  | .  |
| 6:      | 45 | -3 | .  | 1  | 1  | .   | .   | B7 | 00 | .  |
| 7:      | 45 | -3 | .  | 1  | 1  | .   | .   | 00 | B7 | .  |
| 8:      | 63 | -1 | .  | -1 | -1 | -B5 | *2  | .  | .  | .  |
| 9:      | 63 | -1 | .  | -1 | -1 | *2  | -B5 | .  | .  | .  |
| 10:     | 64 | .  | 1  | .  | .  | -1  | -1  | 1  | 1  | 1  |
| 2:      | 1A | 1A | 3A | 2A | 2A | 2A  | 5B  | 5A | 7A | 7B |
| 3:      | 1A | 2A | 1A | 4A | 4B | 4C  | 5B  | 5A | 7B | 7A |

STRUCTURE CONSTANTS FOR CLASS 2A

|     | 1A  | 2A | 3A | 4A | 4B | 4C | 5A | 5B | 7A | 7B |
|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1A: | .   | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |
| 2A: | 315 | 26 | 9  | 8  | 8  | 8  | 5  | 5  | .  | .  |
| 3A: | .   | 64 | 72 | 32 | 32 | 32 | 35 | 35 | 21 | 21 |
| 4A: | .   | 32 | 18 | 35 | 8  | 8  | 20 | 20 | 21 | 21 |
| 4B: | .   | 32 | 18 | 8  | 35 | 8  | 20 | 20 | 21 | 21 |
| 4C: | .   | 32 | 18 | 8  | 8  | 35 | 20 | 20 | 21 | 21 |
| 5A: | .   | 64 | 63 | 64 | 64 | 64 | 65 | 65 | 63 | 63 |
| 5B: | .   | 64 | 63 | 64 | 64 | 64 | 65 | 65 | 63 | 63 |
| 7A: | .   | .  | 27 | 48 | 48 | 48 | 45 | 45 | 42 | 42 |
| 7B: | .   | .  | 27 | 48 | 48 | 48 | 45 | 45 | 63 | 42 |

8. ALT(8) ORDER 20160 =  $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

|         | G  | 192 | 96 | 180 | 18 | 16 | 8  | 15 | 12 | 6  | 7  | 7   | 15  | 15  |
|---------|----|-----|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| P POWER | A  | A   | A  | A   | A  | A  | A  | A  | AA | AA | A  | A   | AA  | AA  |
| P' PART | A  | A   | A  | A   | A  | A  | A  | A  | AA | AA | A  | A   | AA  | AA  |
| 1A      | 2A | 2B  | 3A | 3B  | 4A | 4B | 5A | 6A | 6B | 7A | B* | 15A | B*  | B*  |
| 1:      | 1  | 1   | 1  | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1   |
| 2:      | 7  | -1  | 3  | 4   | 1  | -1 | 1  | 2  | .  | .  | -1 | -1  | .   | .   |
| 3:      | 14 | 6   | 2  | -1  | 2  | 2  | .  | -1 | -1 | .  | .  | -1  | -1  | .   |
| 4:      | 20 | 4   | 4  | 3   | .  | .  | .  | 1  | 1  | -1 | -1 | .   | .   | .   |
| 5:      | 21 | -3  | 1  | 6   | .  | 1  | -1 | 1  | -2 | .  | .  | 1   | 1   | 1   |
| 6:      | 21 | -3  | 1  | -3  | .  | 1  | -1 | 1  | 1  | .  | .  | B15 | 00  | .   |
| 7:      | 21 | -3  | 1  | -3  | .  | 1  | -1 | 1  | 1  | .  | .  | 00  | B15 | .   |
| 8:      | 28 | -4  | 4  | 1   | 1  | .  | -2 | 1  | -1 | .  | .  | 1   | 1   | 1   |
| 9:      | 35 | -1  | -5 | 5   | 2  | -1 | -1 | 0  | 1  | .  | .  | .   | .   | .   |
| 10:     | 45 | -3  | -3 | .   | 1  | 1  | .  | .  | .  | B7 | 00 | .   | .   | .   |
| 11:     | 45 | -3  | -3 | .   | 1  | 1  | .  | .  | .  | 00 | B7 | .   | .   | .   |
| 12:     | 56 | 0   | .  | -4  | -1 | .  | 1  | .  | -1 | .  | .  | 1   | 1   | 1   |
| 13:     | 64 | .   | .  | -4  | -2 | .  | .  | -1 | .  | 1  | 1  | -1  | -1  | .   |
| 14:     | 70 | -2  | 2  | -5  | 1  | -2 | .  | -1 | 1  | .  | .  | .   | .   | .   |
| 2:      | 1A | 1A  | 1A | 3A  | 3B | 2A | 2B | 5A | 3A | 3B | 7A | 7B  | 15A | 15B |
| 3:      | 1A | 2A  | 2B | 1A  | 1A | 4A | 4B | 5A | 2B | 2A | 7B | 7A  | 5A  | 5A  |

STRUCTURE CONSTANTS FOR CLASS 2A

|      | 1A  | 2A | 2B | 3A | 3B | 4A | 4B | 5A | 6A | 6B | 7A | 7B | 15A | 15B |
|------|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| 1A:  | .   | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 2A:  | 105 | 12 | 6  | .  | 3  | 4  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 2B:  | .   | 12 | 3  | .  | 4  | 2  | .  | 3  | .  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 3A:  | .   | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 3  | 2  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 3B:  | .   | 32 | .  | 10 | 16 | 4  | .  | 7  | 7  | 7  | .  | .  | .   | .   |
| 4A:  | .   | 48 | 24 | 10 | 13 | 10 | .  | 6  | 7  | 7  | .  | .  | .   | .   |
| 4B:  | .   | .  | 24 | .  | 9  | 20 | 5  | 15 | 12 | 15 | 14 | 14 | 15  | 15  |
| 5A:  | .   | .  | .  | .  | 8  | .  | 12 | 6  | 7  | 7  | 15 | 15 | .   | .   |
| 6A:  | .   | .  | 45 | .  | .  | 8  | 15 | 6  | 12 | 7  | 7  | 15 | 15  | .   |
| 6B:  | .   | KB | 60 | 21 | 16 | 20 | 15 | 24 | 10 | 14 | 14 | 15 | 15  | .   |
| 7A:  | .   | .  | .  | 10 | 16 | 16 | 15 | 12 | 12 | 14 | 21 | 15 | 15  | .   |
| 7B:  | .   | .  | .  | 10 | 16 | 16 | 15 | 12 | 12 | 21 | 14 | 15 | 15  | .   |
| 15A: | .   | .  | .  | .  | 8  | 15 | 12 | 6  | 7  | 7  | .  | .  | .   | .   |
| 15B: | .   | .  | .  | .  | 8  | 15 | 12 | 6  | 7  | 7  | 15 | .  | .   | .   |

STRUCTURE CONSTANTS FOR CLASS 2B

|      | 1A  | 2A | 2B | 3A | 3B | 4A | 4B | 5A | 6A | 6B | 7A | 7B | 15A | 15B |
|------|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| 1A:  | .   | .  | 1  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 2A:  | .   | 12 | 3  | .  | 4  | 2  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 2B:  | 210 | 6  | 14 | 30 | 9  | .  | 4  | 5  | 6  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 3A:  | .   | .  | 16 | 15 | .  | .  | 4  | 5  | 1  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 3B:  | .   | .  | 48 | .  | 21 | 16 | 20 | 15 | 4  | 3  | 14 | 14 | 15  | 15  |
| 4A:  | .   | 48 | .  | 10 | 26 | 2  | .  | 12 | 18 | 14 | 14 | 15 | 15  | .   |
| 4B:  | .   | 48 | 40 | 90 | 45 | 6  | 34 | 45 | 30 | 15 | 20 | 20 | 15  | 15  |
| 5A:  | .   | .  | 12 | 60 | 18 | .  | 24 | 50 | 12 | 6  | 14 | 14 | .   | .   |
| 6A:  | .   | .  | 40 | 15 | 6  | 16 | 20 | 15 | 29 | 18 | 14 | 14 | 20  | 20  |
| 6B:  | .   | 96 | .  | 9  | 48 | 20 | 15 | 36 | 63 | 20 | 26 | 26 | 45  | 45  |
| 7A:  | .   | .  | .  | 36 | 32 | 32 | 30 | 24 | 24 | 20 | 42 | 30 | 30  | 30  |
| 7B:  | .   | .  | .  | 36 | 32 | 32 | 30 | 24 | 24 | 42 | 28 | 30 | 30  | 30  |
| 15A: | .   | .  | .  | 6  | 16 | 8  | .  | 14 | 14 | 14 | 14 | 30 | 20  | 20  |
| 15B: | .   | .  | .  | 6  | 16 | 8  | .  | 16 | 18 | 14 | 14 | 20 | 30  | 30  |

9. N(12) ORDER 95040 = 2<sup>6</sup>.3<sup>3</sup>.5.11

|         | G  | 240 | 192 | 54 | 36 | 32 | 32 | 18 | 12 | 6  | 8  | 8   | 10  | 11  | 11  |
|---------|----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| P POWER | A  | A   | A   | A  | A  | A  | A  | A  | BA | AB | A  | A   | BA  | A   | A   |
| P PART  | A  | A   | A   | A  | A  | A  | A  | BA | AB | A  | A  | A   | BA  | A   | A   |
| LA      | 2A | 2B  | 3A  | 3B | 4A | 4B | 5A | 6A | 6B | 6A | 6B | 10A | 11A | 11A | 9*  |
| 2: 1    | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1   | 1   |
| 2: 11   | -1 | 3   | 2   | -1 | 3  | -1 | 1  | -1 | 1  | 1  | -1 | -1  | -1  | .   | .   |
| 3: 11   | -1 | 3   | 2   | -1 | 3  | 1  | 1  | -1 | .  | 1  | 1  | -1  | .   | .   | .   |
| 4: 16   | 4  | .   | -2  | 1  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | -1  | 111 | 00  | 00  |
| 5: 16   | 4  | .   | -2  | 1  | .  | .  | 1  | 1  | .  | .  | .  | -1  | 00  | 111 | 00  |
| 6: 45   | 5  | -3  | .   | 3  | 1  | 1  | .  | -1 | .  | -1 | -1 | -1  | .   | 1   | 1   |
| 7: 34   | 6  | 6   | .   | .  | 2  | 2  | -1 | .  | .  | .  | .  | .   | 1   | -1  | -1  |
| 8: 55   | -5 | -1  | 1   | 1  | 1  | 1  | .  | 1  | -1 | -1 | 1  | .   | .   | .   | .   |
| 9: 55   | -5 | -1  | 1   | 1  | -1 | 3  | .  | 1  | -1 | 1  | -1 | .   | .   | .   | .   |
| 10: 55  | -5 | 7   | 1   | 1  | -1 | -1 | .  | 1  | 1  | -1 | -1 | .   | .   | .   | .   |
| 11: 66  | 6  | 2   | 3   | .  | -2 | -2 | .  | 1  | .  | .  | .  | 1   | .   | .   | .   |
| 12: 99  | -1 | 3   | .   | 3  | -1 | -1 | -1 | -1 | .  | 1  | 1  | -1  | .   | -1  | -1  |
| 13: 120 | .  | -8  | 3   | .  | .  | .  | .  | 1  | .  | .  | .  | .   | .   | 1   | 1   |
| 14: 144 | 4  | .   | .   | -3 | .  | .  | -1 | 1  | .  | .  | .  | -1  | .   | .   | .   |
| 15: 176 | -4 | .   | -4  | -1 | .  | .  | 1  | -1 | .  | .  | .  | 1   | .   | .   | .   |
| 2: 1A   | 1A | 1A  | 3A  | 3B | 2B | 2B | 5A | 3B | 2A | 4A | 6B | 5A  | 11B | 11A | 11A |
| 3: 1A   | 2A | 2B  | 1A  | 1A | 4A | 4B | 5A | 2A | 2B | 8A | 6B | 10A | 11A | 11B | 11B |

# STRUCTURE CONSTANTS FOR CLASS 2A

|      | 1A  | 2A  | 2B | 3A  | 3B | 4A | 4B | 5A | 6A | 6B | 8A | 8B | 10A | 11A | 11B |
|------|-----|-----|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| 1A:  | .   | 1   | .  | .   | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .  | .   | .   | .   |
| 2A:  | 396 | 20  | 12 | .   | 9  | 4  | 4  | 5  | 6  | .  | .  | .  | .   | .   | .   |
| 2B:  | .   | 15  | .  | .   | .  | 4  | 4  | .  | 3  | .  | 4  | 4  | 5   | .   | .   |
| 3A:  | .   | .   | .  | 18  | .  | .  | .  | .  | .  | 6  | 8  | 9  | 20  | 11  | 11  |
| 3B:  | .   | 60  | .  | .   | 24 | 16 | 16 | 20 | 7  | 12 | 8  | 8  | 5   | 11  | 11  |
| 4A:  | .   | 30  | 24 | .   | 18 | .  | 36 | 5  | 12 | 18 | 10 | 10 | 15  | 11  | 11  |
| 4B:  | .   | 30  | 24 | .   | 18 | 36 | .  | 5  | 12 | 18 | 10 | 10 | 15  | 11  | 11  |
| 5A:  | .   | 120 | .  | .   | 72 | 16 | 16 | 40 | 46 | 36 | 40 | 40 | 26  | 33  | 33  |
| 6A:  | .   | 120 | 48 | .   | 21 | 32 | 32 | 55 | 38 | 36 | 40 | 40 | 10  | 22  | 22  |
| 6B:  | .   | .   | .  | 54  | 72 | 96 | 96 | 60 | 72 | 54 | 72 | 72 | 60  | 66  | 66  |
| 8A:  | .   | .   | 96 | 54  | 36 | 40 | 40 | 36 | 60 | 54 | 32 | 48 | 50  | 44  | 44  |
| 8B:  | .   | .   | 96 | 54  | 36 | 40 | 40 | 50 | 60 | 54 | 68 | 32 | 50  | 44  | 44  |
| 10A: | .   | .   | 96 | 108 | 18 | 48 | 48 | 24 | 12 | 36 | 40 | 40 | 60  | 44  | 44  |
| 11A: | .   | .   | .  | 54  | 36 | 32 | 32 | 30 | 24 | 36 | 32 | 32 | 40  | 99  | .   |
| 11B: | .   | .   | .  | 54  | 36 | 32 | 32 | 30 | 24 | 36 | 32 | 32 | 40  | .   | 99  |

# STRUCTURE CONSTANTS FOR CLASS 2B

|      | 1A  | 2A  | 2B | 3A  | 3B | 4A  | 4B  | 5A | 6A | 6B | 8A | 8B | 10A | 11A | 11B |
|------|-----|-----|----|-----|----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| 1A:  | .   | .   | 1  | .   | .  | .   | .   | .  | .  | .  | .  | .  | .   | .   | .   |
| 2A:  | .   | 15  | .  | .   | .  | 4   | 4   | .  | 3  | .  | 4  | 4  | 5   | .   | .   |
| 2B:  | 495 | .   | 30 | 18  | 3  | 8   | 8   | 5  | .  | 6  | 8  | 8  | .   | 11  | 11  |
| 3A:  | .   | .   | 64 | 27  | .  | 16  | 16  | 20 | .  | .  | .  | .  | .   | .   | .   |
| 3B:  | .   | .   | 16 | .   | 18 | .   | .   | 5  | 24 | 16 | 16 | 16 | 20  | 11  | 11  |
| 4A:  | .   | 30  | 48 | 27  | .  | 65  | 2   | 20 | 6  | 15 | 36 | .  | 10  | 17  | 11  |
| 4B:  | .   | 30  | 48 | 27  | .  | 2   | 65  | 20 | 6  | 15 | .  | 36 | 10  | 11  | 11  |
| 5A:  | .   | .   | 96 | 108 | 18 | 64  | 64  | 85 | 24 | 48 | 48 | 48 | 20  | 55  | 55  |
| 6A:  | .   | 60  | .  | .   | 72 | 16  | 16  | 20 | 46 | 48 | 32 | 32 | 65  | 44  | 44  |
| 6B:  | .   | 192 | 72 | 96  | 80 | 80  | 80  | 80 | 96 | 87 | 72 | 72 | 80  | 88  | 88  |
| 8A:  | .   | 120 | .  | 54  | 72 | 144 | .   | 60 | 48 | 54 | 99 | 36 | 60  | 66  | 66  |
| 8B:  | .   | 120 | .  | 54  | 72 | .   | 144 | 60 | 48 | 54 | 99 | 60 | 60  | 66  | 66  |
| 10A: | .   | 120 | .  | .   | 72 | 32  | 32  | 20 | 78 | 48 | 48 | 48 | 85  | 44  | 44  |
| 11A: | .   | .   | .  | 54  | 36 | 32  | 32  | 30 | 48 | 48 | 48 | 48 | 40  | 44  | 44  |
| 11B: | .   | .   | .  | 54  | 36 | 32  | 32  | 30 | 48 | 48 | 48 | 48 | 40  | 44  | 44  |

10. W(22) ORDER 443520 = 2<sup>7</sup>.3<sup>2</sup>.5.7.11

|         | G   | 384 | 36 | 32 | 16 | 5  | 12 | 7  | 7  | 8  | 11  | 11  |
|---------|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| P POWER | A   | A   | A  | A  | A  | AA | A  | A  | A  | A  | A   | A   |
| P' PART | A   | A   | A  | A  | A  | AA | A  | A  | A  | A  | A   | A   |
|         | 1A  | 2A  | 3A | 4A | 4B | 5A | 6A | 7A | B* | 8A | 11A | B*  |
| 1:      | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   |
| 2:      | 21  | 5   | 3  | 1  | 1  | 1  | -1 | .  | .  | -1 | -1  | -1  |
| 3:      | 45  | -3  | .  | 1  | 1  | .  | .  | B7 | ** | -1 | 1   | 1   |
| 4:      | 45  | -3  | .  | 1  | 1  | .  | .  | ** | B7 | -1 | 1   | 1   |
| 5:      | 55  | 7   | 1  | 3  | -1 | .  | 1  | -1 | -1 | 1  | .   | .   |
| 6:      | 99  | 3   | .  | 3  | -1 | -1 | .  | 1  | 1  | -1 | .   | .   |
| 7:      | 154 | 10  | 1  | -2 | 2  | -1 | 1  | .  | .  | .  | .   | .   |
| 8:      | 210 | 2   | 3  | -2 | -2 | .  | -1 | .  | .  | .  | 1   | 1   |
| 9:      | 231 | 7   | -3 | -1 | -1 | 1  | 1  | .  | .  | -1 | .   | .   |
| 10:     | 280 | -8  | 1  | .  | .  | .  | 1  | .  | .  | .  | B11 | **  |
| 11:     | 280 | -8  | 1  | .  | .  | .  | 1  | .  | .  | .  | **  | B11 |
| 12:     | 385 | 1   | -2 | 1  | 1  | .  | -2 | .  | .  | 1  | .   | .   |
| 2:      | 1A  | 1A  | 3A | 2A | 2A | 5A | 3A | 7A | 7B | 4A | 11B | 11A |
| 3:      | 1A  | 2A  | 1A | 4A | 4B | 5A | 2A | 7B | 7A | 8A | 11A | 11B |

STRUCTURE CONSTANTS FOR CLASS 2A

|      | 1A   | 2A  | 3A  | 4A  | 4B  | 5A  | 6A  | 7A  | 7B  | 8A  | 11A | 11B |
|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1A:  | .    | 1   | .   | .   | .   | .   | .   | .   | .   | .   | .   | .   |
| 2A:  | 1155 | 50  | 18  | 12  | 8   | 5   | 4   | .   | .   | .   | .   | .   |
| 3A:  | .    | 192 | 117 | 64  | 56  | 50  | 10  | 28  | 28  | 16  | 11  | 11  |
| 4A:  | .    | 144 | 72  | 103 | 16  | 45  | 36  | 28  | 28  | 44  | 22  | 22  |
| 4B:  | .    | 192 | 126 | 32  | 115 | 80  | 54  | 84  | 84  | 60  | 44  | 44  |
| 5A:  | .    | 384 | 360 | 288 | 256 | 315 | 168 | 224 | 224 | 176 | 176 | 176 |
| 6A:  | .    | 192 | 30  | 96  | 72  | 70  | 137 | 84  | 84  | 128 | 121 | 121 |
| 7A:  | .    | .   | 144 | 128 | 192 | 160 | 144 | 147 | 224 | 128 | 176 | 176 |
| 7B:  | .    | .   | 144 | 128 | 192 | 160 | 144 | 224 | 147 | 128 | 176 | 176 |
| 8A:  | .    | .   | 72  | 176 | 120 | 110 | 192 | 112 | 112 | 187 | 198 | 198 |
| 11A: | .    | .   | 36  | 64  | 64  | 80  | 132 | 112 | 112 | 144 | 99  | 132 |
| 11B: | .    | .   | 36  | 64  | 64  | 80  | 132 | 112 | 112 | 144 | 132 | 99  |





13.  $L_2(11)$ , order  $660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

| Repr.<br>$x$ | 1  | $s^3$ | $s^2$ | $s$ | $f$             | $f^2$           | $e$            | $e^2$          |
|--------------|----|-------|-------|-----|-----------------|-----------------|----------------|----------------|
| $C_G(x)$     | 6  | 2     | 6     | 6   | 5               | 5               | 11             | 11             |
| $o(x)$       | 1  | 2     | 3     | 6   | 5               | 5               | 11             | 11             |
| $\chi_1$     | 1  | 1     | 1     | 1   | 1               | 1               | 1              | 1              |
| $\chi_2$     | 5  | 1     | -1    | 1   | 0               | 0               | $\alpha$       | $\bar{\alpha}$ |
| $\chi_3$     | 5  | 1     | -1    | 1   | 0               | 0               | $\bar{\alpha}$ | $\alpha$       |
| $\chi_4$     | 10 | 2     | 1     | -1  | 0               | 0               | -1             | -1             |
| $\chi_5$     | 10 | -2    | 1     | 1   | 0               | 0               | -1             | -1             |
| $\chi_6$     | 11 | -1    | -1    | -1  | 1               | 1               | 0              | 0              |
| $\chi_7$     | 12 | 0     | 0     | 0   | $\beta$         | $\tilde{\beta}$ | 1              | 1              |
| $\chi_8$     | 12 | 0     | 0     | 0   | $\tilde{\beta}$ | $\beta$         | 1              | 1              |

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} i$$

$$\beta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \tilde{\beta} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$



14.  $L_2(23)$ , order  $2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$

| Repr.<br>$x$ | 1  | $t^6$ | $t^3$ | $t^4$ | $t^2$ | $t$         | $t^5$       | $e$        | $e^2$      | $e^3$      | $e^4$      | $e^5$      | $d$            | $d^{-1}$       |
|--------------|----|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|----------------|----------------|
| $C_G(x)$     | 6  | 12.2  | 12    | 12    | 12    | 12          | 12          | 11         | ...        | ...        | 11         | 23         | 23             |                |
| $o(x)$       | 1  | 2     | 4     | 3     | 6     | 12          | 12          | 11         | ...        | ...        | 11         | 23         | 23             |                |
| $1_G$        | 1  | 1     | 1     | 1     | 1     | 1           | 1           | 1          | 1          | 1          | 1          | 1          | 1              | 1              |
| $\rho_1$     | 11 | -1    | 1     | -1    | -1    | 1           | 1           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | $\alpha$       | $\bar{\alpha}$ |
| $\rho_2$     | 11 | -1    | 1     | -1    | -1    | 1           | 1           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | $\bar{\alpha}$ | $\alpha$       |
| $\rho_1$     | 22 | 2     | 0     | 1     | -1    | $-\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$  | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | -1             | -1             |
| $\rho_2$     | 22 | 2     | 0     | 1     | -1    | $\sqrt{3}$  | $-\sqrt{3}$ | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | -1             | -1             |
| $\rho_3$     | 22 | -2    | 2     | 1     | 1     | -1          | -1          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | -1             | -1             |
| $\rho_4$     | 22 | -2    | -2    | 1     | 1     | 1           | 1           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | -1             | -1             |
| $\rho_5$     | 22 | 2     | 0     | -2    | 2     | 0           | 0           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | -1             | -1             |
| $\psi$       | 23 | -1    | -1    | -1    | -1    | -1          | -1          | 1          | 1          | 1          | 1          | 1          | 0              | 0              |
| $\chi_1$     | 24 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0           | 0           | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | 1              | 1              |
| $\chi_2$     | 24 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0           | 0           | $\alpha_2$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_3$ | $\alpha_1$ | 1              | 1              |
| $\chi_3$     | 24 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0           | 0           | $\alpha_3$ | $\alpha_5$ | $\alpha_2$ | $\alpha_1$ | $\alpha_4$ | 1              | 1              |
| $\chi_4$     | 24 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0           | 0           | $\alpha_4$ | $\alpha_3$ | $\alpha_1$ | $\alpha_5$ | $\alpha_2$ | 1              | 1              |
| $\chi_5$     | 24 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0           | 0           | $\alpha_5$ | $\alpha_1$ | $\alpha_4$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | 1              | 1              |

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}i$$

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{23}\right), \quad \alpha_j = \omega^j + \omega^{-j}$$

15.  $L_2(32)$ , order  $2^5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$

| Repr.<br>$\pi$ |    | $\gamma^1$ | $\gamma^3$ | $\gamma^6$ | $\gamma^9$ | $\gamma^{16}$ | $\gamma^{15}$ | $\gamma$   | $\gamma^2$ | $\gamma^3$ | $\gamma^4$ | $\gamma^7$ | $\gamma^8$    | $\gamma^9$    | $\gamma^{10}$ | $\gamma^{11}$ | $\gamma^{12}$ | $\gamma^{13}$ | $\gamma^{14}$ | $z^1$ | $z^2$ | $z^3$ | $z^4$ | $z^5$ |
|----------------|----|------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Orb            | 1  | 2          | 3          | 4          | 5          | 6             | 7             | 8          | 9          | 10         | 11         | 12         | 13            | 14            | 15            | 16            | 17            | 18            | 19            | 20    | 21    | 22    | 23    | 24    |
| $\omega$       | 1  | 1          | 1          | 1          | 1          | 1             | 1             | 1          | 1          | 1          | 1          | 1          | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             | 1             | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| $\sigma$       | 32 | 0          | -1         | -1         | -1         | -1            | -1            | -1         | -1         | -1         | -1         | -1         | -1            | -1            | -1            | -1            | -1            | -1            | -1            | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| $\tau_1$       | 34 | -1         | -2         | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\tau_2$       | 34 | -1         | -2         | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\tau_3$       | 34 | -1         | -2         | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\tau_4$       | 34 | -1         | -2         | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\rho$         | 34 | -1         | 1          | -2         | -2         | -2            | -2            | -2         | -2         | -2         | -2         | -2         | -2            | -2            | -2            | -2            | -2            | -2            | -2            | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\psi_1$       | 34 | -1         | 1          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\psi_2$       | 34 | -1         | 1          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\psi_3$       | 34 | -1         | 1          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\psi_4$       | 34 | -1         | 1          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\psi_5$       | 34 | -1         | 1          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\psi_6$       | 34 | -1         | 1          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\psi_7$       | 34 | -1         | 1          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\psi_8$       | 34 | -1         | 1          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\psi_9$       | 34 | -1         | 1          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\psi_{10}$    | 34 | -1         | 1          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$    | $\omega_4$    | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ | $\omega_8$ | $\omega_9$ | $\omega_{10}$ | $\omega_{11}$ | $\omega_{12}$ | $\omega_{13}$ | $\omega_{14}$ | $\omega_{15}$ | $\omega_{16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\mu_1$        | 33 | 1          | 0          | 0          | 0          | 0             | 0             | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $\mu_2$        | 33 | 1          | 0          | 0          | 0          | 0             | 0             | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $\mu_3$        | 33 | 1          | 0          | 0          | 0          | 0             | 0             | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $\mu_4$        | 33 | 1          | 0          | 0          | 0          | 0             | 0             | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $\mu_5$        | 33 | 1          | 0          | 0          | 0          | 0             | 0             | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |

$\omega$  = primitive 33<sup>rd</sup> root of unity  
 $\omega = \omega^3$

$\alpha_j = -(\omega^3 + \omega^j)$ ,  $j=1, 2, \dots, 10$

$\beta_j = -(\omega^3 + \omega^j)$  for

$j \in \Omega = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 14, 16\}$

$\varepsilon$  = primitive 34<sup>th</sup> root of unity

$\gamma_j = \varepsilon^3 + \varepsilon^j$ ,  $j=1, 2, \dots, 15$

$\chi_{4j} = \gamma_j$  if

$4 \cdot j \equiv \pm 1 \pmod{31}$   
 (mod 31)

$\sum_{j=1}^{31} \omega_j = 1$

$\sum_{j \in \Omega} \beta_j = -1$

$\sum_{j=1}^{31} \gamma_j = -1$

LITERATURVERZEICHNIS

1. ALEX, L.; Simple groups with a cyclic Sylow subgroup;  
Proc. Conf. on Finite Groups (ed. Scott/Gross),  
Academic Press, New York, 1976 .
2. ASCHBACHER, M. ; F-Sets and Permutation Groups;  
J. Algebra 30 (1974), 400 - 416 .
3. ASCHBACHER, M. ; Finite groups in which the generalized  
Fitting subgroup of the centralizer of some involu-  
tion is symplectic but not extraspecial;  
Commun. Algebra 4 (1976), 595 - 616 .
4. ASCHBACHER, M. ; On finite groups in which the genera-  
lized Fitting subgroup of the centralizer of some  
involution is extraspecial;  
Illin. J. Math. 21 (1977), 347 - 364 .
5. ASCHBACHER, M. ; A characterization of Chevalley groups  
over fields of odd order;  
Annals of Math. 106 (1977), 353 - 398 .  
A correction to "A characterization of ... " ;  
Annals of Math. 111 (1980), 411 - 414 .
6. ASCHBACHER, M. ; Thin finite simple groups;  
J. Algebra 54 (1978), 50 - 152 .
7. ASCHBACHER, M. , SEITZ, G. ; On groups with a standard  
component of known type I, II ;  
Osaka J. Math. 13 (1976), 439-482 ; 18 (1981), 703-723 .
8. BEISIEGEL, B. ; Über einfache endliche Gruppen mit einer  
Sylow 2-Untergruppe der Ordnung höchstens  $2^{10}$  ;  
Commun. Algebra 5 (1977), 113 - 170 .

9. BELL, G.W. ; On the cohomology of the special linear groups I, II ;  
J. Algebra 54 (1978), 216 - 238, 239 - 259 .
10. BENSON, D. ; On the existence of  $L_2(32)$  in  $J_4$  ;  
private communication.
11. BIERBRAUER, J. ; A characterization of the 'Baby Monster'  $F_2$  , including a note on  ${}^2E_6(2)$  .  
J. Algebra 56 (1979), 384 - 395.
12. BLACKBURN, N. , HUPPERT, B. ; 'Finite Groups' II , III ;  
Springer Verlag, Berlin, 1982 .
13. BOMBIERI, E. ; Thompson's Problem ( $\sigma^2 = 1$ ) ;  
Inventiones Mathem. 58 (1980), 77 - 100 .
14. BRAUER, R. ; On simple groups of order  $5 \cdot 3^a \cdot 2^b$  ;  
Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 900 - 903 .
15. CHENG, K.N. , HELD, D. ; Finite groups with a standard component of type  $L_3(4)$  I , II ;  
Rend. Cont. Sem. Padova 65 (1981), 59 - 75 ;  
73 (1985), 147 - 167 .
16. COHN, J.A. ; On the normalizers of elements of prime order in simple groups ;  
J. Algebra 29 (1974), 387 - 400 .
17. COLLINS, M.J. ; A Survey of the Classification Project ;  
Finite Simple Groups II (ed. Collins) , Academic Press, London, 1980 .
18. CONWAY, J.H. ; Three lectures on exceptional groups ;  
Finite Simple Groups (ed. Powell/Higman), Academic Press, London, 1971 .

19. DEXHEIMER, B. ; Eine Kennzeichnung von  $D_5(2)$  durch eine 2-lokale Untergruppe ;  
Diplomarbeit, Mainz, 1977/78 .
20. FINKELSTEIN, L. ; Finite groups with a standard component isomorphic to  $M_{22}$  ;  
J. Algebra 44 (1977), 558 - 572 .
21. FINKELSTEIN, L. ; Finite groups with a standard component whose centralizer has cyclic Sylow 2-subgroups ;  
Proc. Am. Math. Soc. 62 (1977), 237 - 241 .
22. FOOTE, R. ; Finite groups with Sylow 2-subgroups of type  $L_6(q)$  ,  $q \equiv 3 \pmod{4}$  ;  
J. Algebra 68 (1981), 378 - 389 .
23. GOLDSCHMIDT, D.M. ; 2-Fusion in Finite Groups ;  
Annals of Math. 99 (1974), 70 - 117 .
24. GORENSTEIN, D. ; 'Finite Groups' ;  
Harper & Row , New York , 1968 .
25. GORENSTEIN, D. ; 'Finite Simple Groups' ;  
Plenum Press, New York , 1982 .
26. GORENSTEIN, D. , HARADA, K. ; Finite groups whose 2-subgroups are generated by at most four elements ;  
Mem. Am. Math. Soc. 147 (1974) .
27. GORENSTEIN, D. , LYONS, R. ; Nonsolvable finite groups with solvable 2-local subgroups ;  
J. Algebra 38 (1976), 453 - 522 .
28. GRIESS, R.L. , MASON, D.R. , SEITZ, G.M. ; Bender groups as standard subgroups ;  
Trans. Am. Math. Soc. 238 (1978), 179 - 211 .

29. HALL, J.I. ; Certain 2-local blocks with alternating sections ;  
Commun. Algebra, 10 (1982), 1721 - 1747 .
30. HARADA, K. ; On finite groups having self-centralizing 2-subgroups of small order ;  
J. Algebra 33 (1975), 144 - 160 .
31. HARADA, K. ; Finite groups having 2-local subgroups  $E_{16} L_4(2)$  ;  
Jour. Fac. Sci. Tokyo 25 (1978), 219 - 236 .
32. HARADA, K. , YAMAKI, H. ; Finite groups having 2-local subgroups  $E_{16} L_4(2)$ , II ;  
Jour. Fac. Sci. Tokyo 26 (1979), 97 - 114 .
33. HARRIS, M.E. ; Finite groups having an involution centralizer with a 2-component of dihedral type , II ;  
Illin. J. Math. 21 (1977), 621 - 647 .
- 33.a HARRIS, M.E. , SOLOMON, R. ; Finite groups having an involution centralizer with a 2-component of dihedral type , I ;  
Illin. J. Math. 21 (1977), 575 - 620 .
34. HIGMAN, G. ; Odd Characterizations of Finite Simple Groups ; Lecture Notes, Univ. of Michigan, 1968 .
35. HUPPERT, B. ; 'Endliche Gruppen I' ;  
Springer Verlag, Berlin, 1967 .
36. JAMES, D.G. ; The modular characters of the Mathieu groups ;  
J. Algebra 27 (1973), 57 - 111 .
37. JANKO, Z. ; A new finite simple group of order  
86 775 571 046 077 562 880 which possesses  $M_{24}$  and

- the full covering group of  $M_{22}$  as subgroups ;  
J. Algebra 42 (1976), 564 - 596 .
38. LEMPKEN, W. ; A 2-Local Characterization of Janko's Simple Group  $J_4$  ;  
J. Algebra 55 (1978), 403 - 445 .
39. LEMPKEN, W. ; The Schur Multiplier of  $J_4$  is Trivial ;  
Archiv der Math. 30 (1978), 276 - 280 .
40. MCKAY, J. ; The nonabelian simple groups  $G$  ,  $|G| < 10^6$  -  
Character Tables ;  
Commun. Algebra 7 (1979), 1407 - 1445 .
41. McLAUGHLIN, J. ; Some subgroups of  $SL_n(F_2)$  ;  
Illin. J. Math. 13 (1969), 108 - 115 .
42. McWILLIAMS, A. ; On 2-groups with no normal abelian  
subgroups of rank 3 and their occurrence as Sylow  
2-subgroups of finite simple groups ;  
Trans. Am. Math. Soc. 150 (1970), 345 - 408 .
43. MIZUTANI, H. ; Primitive permutation groups of  
degree at most 48 ;  
private communication.
44. NEUBÜSER ET AL ; Character Tables of Sporadic Simple  
Groups ; CAS-System , Aachen , 1982/83 .
45. NEUMANN, P.M. ; Permutationsgruppen vom Primzahlgrad  
und verwandte Probleme ;  
Vorlesungen aus dem mathem. Institut Giessen, 1977 .
46. NORTON, S. ; The Construction of  $J_4$  ;  
Proc. Symposia in Pure Mathematics 37 (1980), 271-277 ;  
Private Kommunikation.

47. O'NAN, M. ; A characterization of  $L_n(q)$  as a permutation group ;  
Mathem. Zeitschrift 127 (1972), 301 - 314 .
48. O'NAN, M. ; Normal structure of the one-point stabilizer of a doubly transitive permutation group ;  
Trans. Am. Math. Soc. 214 (1975), 1 - 42, 43 - 74 .
49. O'NAN, M. ; Doubly transitive groups of odd degree whose one-point stabilizer is local ;  
J. Algebra 39 (1976), 440 - 482 .
50. O'NAN, M. ; Some evidence for the existence of a new finite simple group.  
Proc. London Math. Soc. 32 (1976), 421 - 479 .
51. O'NAN, M. ; Some characterizations by centralizers of elements of order three ;  
J. Algebra 48 (1977), 113 - 141 .
52. O'NAN, M. ; A Characterization of The Rudvalis Simple Group ;  
Commun. Algebra 6 (1978), 107 - 147 .
53. O'NAN, M. , SOLOMON, R. ; Simple groups transitive on internal flags ;  
J. Algebra 39 (1976), 375 - 409 .
54. PRINCE, A.R. ; On 2-groups admitting  $A_5$  or  $A_6$  with an element of order 5 acting fixed point freely ;  
J. Algebra 59 (1977), 374 - 386 .
55. PRINCE, A.R. ; An analogue of Maschke's theorem for certain representations of  $A_6$  over  $GF(2)$  ;  
Proc. Royal Soc. Edinburgh 91A (1982), 175 - 177 .



- 56. REIFART, A. ; Another characterization of Janko's  
simple group  $J_4$  ;  
J. Algebra 49 (1977), 621 - 627 .
- 57. REIFART, A. ; A 2-local characterization of the simple  
groups  $M(24)'$ ,  $Co_1$  and  $J_4$  ;  
J. Algebra 50 (1978), 213 - 227 .
- 58. REIFART, A. ; On finite simple groups with large extra-  
special subgroups , I ;  
J. Algebra 53 (1978), 452 - 470 .
- 58.a REIFART, A. ; On finite simple groups with large extra-  
special subgroups , II ;  
J. Algebra 54 (1978), 273 - 289 .
- 59. REINER, I. ; On the number of irreducible modular  
representations of a finite group ;  
Proc. Am. Math. Soc. 15 (1964), 810 - 812 .
- 60. SIEGERIS, J. ; Einige Sylow 2-Charakterisierungen ;  
Diplomarbeit, Mainz, 1977 .
- 61. SMITH, S.D. ; Large extraspecial subgroups of  
width 4 and 6 ;  
J. Algebra 58 (1979), 251 - 281 .
- 62. SMITH, S.D. ; A characterization of orthogonal  
groups over  $GF(2)$  ;  
J. Algebra 62 (1980), 39 - 60 .
- 63. SMITH, S.D. ; A characterization of finite Chevalley  
and twisted groups of type E over  $GF(2)$  ;  
J. Algebra 62 (1980), 101 - 117 .

- 64. SMITH, S.D. , TYRER, A.P. ; On finite groups with a  
certain Sylow normalizer I, II ;  
J. Algebra 26 (1973), 343 - 365, 366 - 367 .
- 65. SOLOMON, R. ; On certain 2-local blocks ;  
Proc. London Math. Soc. 43 (1981), 478 - 498 .
- 66. SOLOMON, R. , WONG, S.K. ; On  $L_2(2^n)$ -Blocks ;  
Proc. London Math. Soc. 43 (1981), 499 - 519 .
- 67. STAFFORD, R. ; A characterization of Janko's simple  
group  $J_4$  by centralizers of elements of order 3 ;  
J. Algebra 57 (1979), 555 - 566 .
- 68. STELLMACHER, B. ; Über endliche Gruppen mit 2-lokalen  
maximalen Untergruppen ;  
J. Algebra 70 (1981), 48 - 77 .
- 69. STINGL, V. ; Endliche einfache Component-Type-Gruppen,  
deren Ordnung nicht durch  $2^{11}$  teilbar ist ;  
Dissertation , Mainz , 1976 .
- 70. STROTH, G. ; Gruppen mit kleinen 2-lokalen Untergruppen ;  
J. Algebra 47 (1977), 441 - 454 .
- 71. STROTH, G. ; Endliche einfache Gruppen mit einer zentra-  
lisatorgleichen elementar-abelschen Untergruppe der  
Ordnung 16 ;  
J. Algebra 47 (1977), 480 - 521 .
- 72. STROTH, G. ; An odd characterization of  $J_4$  ;  
Israel J. Math. 31 (1978), 189 - 192 .
- 73. STROTH, G. ; Kammersysteme vom  $S_5$ -Typ und Gruppen vom  
Rang 2 ;  
Preprint, Berlin , 1983 .

74. THOMPSON, J. ; Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable , I - VI ;  
Bull. Am. Math. Soc. 74 (1968), 383 - 347 ;  
Pac. J. Math. 33 (1970), 431 - 536 ;  
39 (1971), 483 - 534 ; 48 (1973), 511 - 592 ;  
50 (1974), 215 - 297 ; 51 (1974), 573 - 630 .
75. TIMMESFELD, F.G. ; Finite simple groups in which the generalized Fitting subgroup of the centralizer , of some involution is extraspecial ;  
Annals of Math. 107 (1978), 297 - 369 .
76. TIMMESFELD, F.G. ; Amalgams with rank 2 groups of Lie type in characteristic 2 ;  
Preprint, Giessen , 1984 .
77. VAN TRUNG, T. ; Eine Kennzeichnung der endlichen einfachen Gruppe  $J_4$  durch eine 2-lokale Untergruppe ;  
Rend. Cont. Sem. Math. Padova 62 (1980), 35 - 45 .
78. WAGNER, A. ; The faithful liner representations of least degree of  $S_n$  and  $A_n$  over a field of characteristic 2 ;  
Math. Zeitschrift 151 (1976), 127 - 137 .
79. WAGNER, A. ; The subgroups of  $PSL(5, 2^a)$  ;  
Resultate der Mathematik 1 (1983), 207 - 226 .
80. WALES, D. ; Simple groups of order  $7 \cdot 3^a \cdot 2^b$  ;  
J. Algebra 16 (1970), 575 - 596 .
81. WALTER, J.H. ; The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups ;  
Annals of Math. 89 (1969), 405 - 514 .
82. YOSHIDA, T. ; Character-Theoretic Transfer ;  
J. Algebra 52 (1978), 1 - 38 .



## LEBENS LAUF

Wolfgang Lempken, geb. am 4.1.1953 in Woldert

|                           |                                                                                                                                        |
|---------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1959 - 1963               | Besuch der Grundschule in Woldert                                                                                                      |
| 1963 - 1971               | Besuch des Martin-Butzer-Gymnasiums in Dierdorf                                                                                        |
| 22.5.1971                 | Abitur                                                                                                                                 |
| Okt. 1971                 | Beginn eines Mathematikstudiums an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz als Stipendiat der Studienstiftung des deutschen Volkes |
| 19.10.1973                | Vordiplomprüfung                                                                                                                       |
| 21.7.1977                 | Diplomprüfung mit Diplomarbeit bei Prof. Dr. D. Held über das Thema 'Eine 2-lokale Kennzeichnung von Janko's einfacher Gruppe $J_4$ '  |
| Sept. 1977 -<br>Okt. 1978 | Studienaufenthalt an der 'University of Warwick' in Coventry, England                                                                  |
| Okt. 1978 -<br>März 1982  | Wissenschaftliche Hilfskraft an der Gutenberg-Universität in Mainz und Lehrtätigkeit an der 'University of Maryland'                   |
| Seit<br>April 1982        | Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz                                   |











